

La enseñanza de la topología a través de la cartografía*

Es sabido que lo propio del pensamiento es que se 'trabaja' con representaciones.

Sauvy, Jean y Simonne

Óscar Leonardo Cárdenas Forero
IED Entre Nubes Sur Oriental, j. t.

Fecha elaboración: marzo 15 de 2004.

Fecha de aceptación: abril 30 de 2004.

Resumen. Esta experiencia pedagógica pretende reconocer, de una parte, que existe una profunda relación entre la cartografía y la matemática escolar, particularmente la geometría, y de otra, que la enseñanza de la geometría en la Escuela, en muchos casos ha desaparecido de los currículos escolares, y en aquellos en los que se mantiene, ha estado supeditada a la geometría euclidiana. Su enseñanza se realiza de manera parcial y fragmentada, desconociendo desde el contexto de la Básica primaria, que los niños poseen muchas nociones intuitivas del espacio.

Palabras clave: topología, grafos, frontera, región exterior, puntos exteriores, puntos interiores, puntos frontera.

Summary. This pedagogic experience tries to admit of a part, that a deep relation exists between the cartography and the school mathematics, particularly the geometry, and of other one, which the education of the geometry in the school, in many cases has eliminated of the school curricula and in those in which still his education, this discipline is kept to condition subordinated to the geometry euclidiana. His education is realized in a partial and fragmented way not knowing, basically from the context of the basic primary one, that the children possess many intuitive notions of the space.

Key words: topology, graphs, border, interior region, exterior region, exterior points, interior points, points border.

Diversas investigaciones realizadas [Sherard (1976); Lurcat (1979); Sauvy (1980); Dickson (1984); y Del Grande (1987)] han reconocido que los niños ingresan a la escuela con muchas nociones intuitivas del espacio. Sin embargo, en la mayoría de las instituciones escolares, especialmente en las de educación básica primaria, esta situación no se tiene en cuenta, y por el contrario, es uno de los aspectos que tal vez poca o ninguna importancia tiene en la estructuración, procesos y actividades del quehacer matemático en el aula. Y es que precisamente, reconocer la existencia de estas vivencias de conocimiento espaciales en los niños, es fundamental para la iniciación del proceso de desarrollo y constitución del pensamiento espacial y geométrico, pues al desarrollar estas formas de pensamiento se contribuye a un mejor conocimiento y aprehensión espacial por parte de los niños y se mejora el manejo de información espacial para solucionar problemas de orientación, localización, ubicación y distribución de espacios, esenciales para el mundo tridimensional en el que actúan. Uno de los caminos que posibilitan desde la escuela la apropiación espacial es el desarrollo de las habilidades de percepción visual, la cartografía y la geometría.

* El siguiente artículo forma parte de la experiencia pedagógica *Pensar matemáticamente: una manera distinta de enfocar el ambiente matemático en la escuela*, que se viene implementando desde el 2001 con los estudiantes de grado segundo -ahora en cuarto- en la institución Santa Rita S. O.

La escasa preocupación por ayudar a los estudiantes a apropiarse y a construir su espacio, se ha visto reflejado, entre otras cosas, en el hecho de que la geometría prácticamente haya desaparecido del currículo escolar (Castañeda, 2000), pero cuando la escuela lo logra hacer, lo realiza de manera parcial y fragmentada, es decir, desde los elementos del *espacio euclidiano*, desconociendo como lo afirma Sauvy *et. al.* (1980:12) que el espacio es una *totalidad* compuesta por tres variantes:

- a. Topológico. Relaciones ligadas al espacio que juega con las nociones de *continuo* y *discontinuo*, *vecindad*, *campo*, *frontera*, *apertura* y *clausura*, *interior* y *exterior*, *disyunción* y “*un solo limite*”, *agujerado* y *no agujereado*.
- b. Proyectivo. Relaciones espaciales que integran las nociones de *izquierda*, *derecha*, *delante*, *detrás*, etc.
- c. Euclidiano. Relaciones ligadas al espacio que juega con las nociones de *medida* y *distancia*.

Ya en uno de sus trabajos, Sauvy *et. al.* (1980:12) reconocen como Jean Piaget ha demostrado que las relaciones topológicas son aprehendidas por los niños incluso primero que las relaciones proyectivas y, sobre todo, antes que las relaciones euclidianas.

Asimismo, los estudios hechos por Colmez (1977), Fey (1979) [citados por Bishop 1986: 184-185] y Segura (1999), sostienen que muchos docentes de educación inicial privilegian, en gran medida para la clase de matemáticas, la adquisición de destrezas y habilidades numéricas y aritméticas, el manejo de algoritmos relacionados con las cuatro operaciones básicas y la memorización de procedimientos mecánicos para la resolución de problemas y ejercicios. Lo más interesante es que estos aspectos se presentan a la comunidad escolar como lo más relevante de la matemática en el aula, olvidando los otros componentes integrales que constituyen la matemática escolar, es decir, lo *métrico*, *lógico*, *numérico*, *estadístico*, *variacional*, *probabilístico*, y por supuesto, lo *espacial* y *geométrico*, los cuales son importantes en el desarrollo del *pensamiento matemático*.

Los docentes, al interesarse sólo por la aritmética, tienden a *oscurecer* la idea de que casi todo el mundo –en especial los niños–, afrontan con mayor frecuencia problemas espaciales que problemas numéricos en su vida cotidiana (Hemming *et. al.*, citados por Delaney, citado por Dickson 1984). Ese interés en particular por desarrollar lo aritmético en los estudiantes, al parecer se debe a que los docentes aún consideran que los niños no están capacitados para pensar de manera abstracta antes de una edad determinada y que se presentan estadios definidos en la evolución del pensamiento (Gattegno, 1964).

Cabe entonces preguntarse, si los niños poseen muchas nociones intuitivas del espacio y vivencias de conocimiento espacial, ¿por qué seguir manteniendo el esquema de enseñanza de la matemática escolar centrado en lo aritmético y numérico, dejando de lado lo geométrico y espacial? (claro está, sin desconocer la importancia de lo numérico dentro del desarrollo del pensamiento matemático). ¿Por qué no dar cabida a propuestas que integren las diversas áreas académicas en favor del proceso de aprehensión y conocimiento espacial privilegiando el desarrollo de las habilidades de percepción visual y la construcción geométrica, además del desarrollo del pensamiento matemático en el aula, es decir, en donde se maneje de manera integral lo numérico, variacional, métrico, espacial, probabilístico, y lo geométrico? ¿Por qué no plantear alternativas que pretendan no sólo transformar el *ambiente de aprendizaje matemático* en el aula, favoreciendo el desarrollo de habilidades espaciales y geométricas que contribuyan en el proceso de representación espacial, sino también la práctica pedagógica del maestro?

Desarrollo de la percepción espacial. Enseñanza de la geometría

Las investigaciones realizadas por Sherard (1976), Hoffer (1977), Frostig (1978) y Del Grande (1987), y los planteamientos expresados en los *Lineamientos curriculares de matemáticas* (1998) y los *Estándares curriculares* (2003), han destacado la necesidad e importancia del desarrollo de la geometría y del pensa-

miento espacial, especialmente en los primeros años de escolaridad, pues aprovechando todas esas vivencias de conocimiento espacial de los niños, se abren las oportunidades para que construyan ideas geométricas y se apropien del espacio.

Al mismo tiempo, al parecer es posible aprehender simultáneamente las habilidades de percepción visual² (coordinación visomotriz, percepción figura-fondo, constancia perceptual, memoria visual, percepción de posición en el espacio, percepción de relaciones espaciales y discriminación visual,) y los conceptos geométricos. (Hoffer, 1977: 72, citado por Del Grande, 1987: 125).

Esto no sólo se convierte en una posibilidad didáctica en la que se integra la geometría al desarrollo de la percepción espacial, sino que es la apertura a la realización de trabajos en los que se pueden involucrar otras disciplinas académicas, por ejemplo, la geografía, la astronomía y en especial, la cartografía, ya que a través de los planos, en los que se destacan lugares (como es el caso del plano de un barrio o ciudad), se pueden trazar *itinerarios* en forma de rutas, caminos o grafos, en donde los cruces de calles y carreras pueden ser asumidos como *vértices* y las calles y carreras mismas como *aristas*.

No sólo estas actividades implican el trabajo con este tipo de conceptos geométricos. Se pueden introducir las nociones topológicas de *frontera*, *región* (interior y exterior), *vecindad* (teoría de los cuatro colores), *caminos abiertos*, *cerrados*, *simples*, *no simples*, entre otros. Un ejemplo de este tipo de ejercicios consiste en solicitarle a los estudiantes trazar un *camino* (curvo y cerrado, a fin de conformar una región con interior) sobre un mapa de un lugar específico, de tal manera que se les indique que determinadas poblaciones del lugar escogido queden ubicadas en el *interior* y otras en el *exterior*, para que así se inicie el proceso de reco-

nocimiento de *puntos frontera*, *puntos interiores* y *exteriores*, *regiones*, *vecindad cierre*, *apertura*. Y es que el niño, al buscar nombres de lugares en un mapa emplea, además, la *percepción figura-fondo*, y al localizar posiciones en los mapas, planos y globos terráqueos utiliza la *coordinación viso-motriz*, *percepción de la posición en el espacio* y las *relaciones espaciales*.

Diseño y aplicación de la propuesta

Con base en lo anteriormente expuesto, se inició para el año 2001, el proceso de diseño e implementación de una estrategia que lograra transformar no sólo el ambiente de aprendizaje matemático en la Institución (reconociendo sus características), sino también la práctica del maestro en el aula, la imagen que en particular asumía la comunidad educativa de la Institución frente a la disciplina escolar, además de destacar el papel del pensamiento espacial y geométrico en el proceso de constitución del *pensamiento matemático*, y asimismo, reconocer las formas de construcción de nociones topológicas y conceptos geométricos a partir de unas actividades propuestas desde una unidad didáctica, para lograr simultáneamente aumentar y mejorar el desarrollo de las habilidades de percepción espacial y construcción geométrica de los niños, desde la cartografía. De esta manera se quiso validar la tesis de que sí es posible enseñar nociones topológicas y habilidades de percepción espacial desde las representaciones cartográficas.

El planteamiento de la propuesta está dado por cuatro momentos:

- Diseño de la propuesta.
- Implementación y ajustes de la propuesta en el aula.
- Sistematización, Evaluación, Ajustes y Seguimiento.
- Análisis de resultados y reflexiones.

Una de las estrategias metodológicas que más se ajusta a los requerimientos exigidos desde la propuesta, son las *unidades didácticas*, las cuales, como una forma de programación y de actuación en el aula, organizan los procesos, contenidos y actividades del aprendizaje estudiantil frente a las intenciones planteadas.

² En los *Lineamientos curriculares en matemáticas* (1998: 56) el pensamiento espacial aparece definido como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales, y a su vez hacen hincapié en la necesidad de la enseñanza de la geometría intuitiva en la escuela.

Como fundamento epistemológico para elaborar la unidad didáctica, se tienen en cuenta los planteamientos de Ander-Egg (1996:204). Según el autor, las unidades didácticas están dadas por elementos en interrelación sistemática: *actividades, contenidos, opciones metodológicas, secuenciación de contenidos, materiales, recursos didácticos*, entre otros. Con la unidad didáctica titulada *Planos, mapas y rutas*, se pretende no sólo desarrollar las habilidades de percepción espacial y la geometría a partir de la Cartografía (de esta forma la unidad didáctica se vuelve *integral* en tanto abarca elementos de distintas disciplinas como la geografía, la matemática, la cartografía y la geometría), sino abrir posibilidades de trabajo en las que se relacionen los elementos que constituyen el *pensamiento matemático*, y asimismo, introducir los cuatro elementos que lo posibilitan: *creatividad, razonamiento lógico, modelación y operatoria* (Segura, 1989).

Ya en algunos escritos (*Lineamientos curriculares en matemáticas* 1998:61-62), se reconoce como desde la lectura de mapas y la construcción geométrica se acercan los estudiantes a la medición y se les permite desarrollar conceptos y destrezas matemáticas.

En el *primer momento*, se diseña la unidad didáctica *Planos, mapas y rutas* teniendo en cuenta:

- a. Las nociones topológicas que se pretenden desarrollar. 1. Frontera (conexas, no conexas); 2. región (interior y exterior); 3. caminos (curvos, cerrados, abiertos, convexos, cóncavos, rectos, simples, no simples); 4. vecindad; 5. agujeros; 6. grafos; 7. continuo y discontinuo; 8. teoría de los cuatro colores.
- b. Las siete habilidades de percepción espacial a desarrollar desde las actividades de la unidad didáctica *Planos, mapas y rutas*: a. Coordinación visomotriz; b. Percepción figura-fondo; c. Constancia perceptual; d. Percepción de posición en el espacio; e. Percepción de relaciones espaciales; f. Discriminación visual; g. Memoria visual.
- c. Los recursos didácticos (materiales y textos) a utilizar: geoplanos, laberintos, mapas temáticos, de zonas, líneas y puntos (de Colombia, Cundinamarca,

Bogotá, de otros departamentos del país), mapas históricos, políticos, de viajes y rutas, globos terráqueos, planos de la escuela, viviendas, de lugares del barrio, de barrios, de ciudades, cuadrículas, atlas, textos escolares afines a los requerimientos de las actividades, guías de trabajo, fotografías aéreas, satelitales, cartas astronómicas.

- d. Los contenidos programáticos, que abarcan tres grandes niveles: 1. planos, cuadrículas y geoplanos; 2. mapas y otras representaciones cartográficas y 3. laberintos y rutas.
- e. Las actividades a desarrollar. Se diseñaron seis grandes actividades integradas a la vez por: 1. nociones topológicas y habilidades de percepción espacial a desarrollar; 2. logros; 3. actividades preliminares; 4. desarrollo de la actividad en sí, y 5. actividades de extensión para la casa. Las actividades se titularon: 1. dibujando rutas por los mapas; 2. caminos, rutas y grafos en el geoplano; 3. rutas, laberintos y juegos; 4. planos, rutas y grafos; 5. regiones, caminos, rutas y grafos, y 6. mapas, rutas y figuras geométricas.
- f. La secuenciación de las actividades, hace referencia a los tiempos y al orden que se establecen dentro del cronograma general para implementar los contenidos y actividades de la unidad didáctica.

El *segundo momento*, hace referencia a la implementación de la unidad didáctica en el aula, la cual se convierte en el eje generador de un ambiente de aprendizaje matemático en el que se privilegia el trabajo colectivo. El trabajo en grupo genera la posibilidad de que los niños no sólo se reconozcan y acepten a sí mismos (en sus fortalezas y debilidades), sino al otro. Además, esta forma de trabajo contribuye en la validación de escritos y verbalizaciones hechas durante el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes.

Otro de los elementos característicos de este ambiente de aprendizaje, es que desde allí se observó la importancia de plantear a los niños retos, desafíos y situaciones problemáticas relacionadas con la cons-



trucción de nociones y conceptos topológicos en representaciones cartográficas, pues ello incentiva actitudes de búsqueda, curiosidad, creatividad, interrogación y exploración de posibles alternativas de solución.

La implementación de la propuesta evidenció la necesidad de iniciar procesos en los que los niños logren de manera recíproca ir de lo *bidimensional* a lo *tridimensional*, además de trabajar alrededor de *macroespacios*, pues la escuela generalmente se mueve en el *meso espacio*. Al mismo tiempo, surgió la necesidad de diseñar modelos (maquetas, construcción de sólidos y mapas en 3D, por ejemplo) en torno al trabajo topológico con las representaciones cartográficas.

El *tercer momento* de la propuesta es el de la sistematización, evaluación, ajustes y seguimiento.

Con cada una de las actividades propuestas se alimenta el proceso de constitución del pensamiento espacial y geométrico, y además, se genera la transición del espacio topológico al espacio euclidiano, por ello en las actividades se introducen simultáneamente con las nociones topológicas, los conceptos euclidianos de polígonos, (particularmente, triángulos y cuadriláteros), de área y perímetro entre otros.

Para dar cuenta de ello, fue necesario diseñar un instrumento de sistematización, organización y evaluación de la información para mostrar la riqueza de la experiencia pedagógica.

La información se recogió y distribuyó en una matriz de doble entrada. Por una parte, se tomaron las evidencias de la forma como se desarrollaban las siete habilidades de percepción visual, y de otra, cómo se estaban construyendo las nociones y conceptos topológicos en cada una de las actividades propuestas desde la unidad didáctica. Por ejemplo, en la *Actividad 1* (Dibujando rutas por los mapas, ver *Anexo 2*) las nociones topológicas a construir (camino, rutas, nociones de cerrado, abierto, interior, exterior, curvo, recto, vecindad) y las habilidades de percepción vi-

sual, se desarrollan mediante ejercicios en los que a cada estudiante se le propone trazar caminos o rutas (abiertas, cerradas, rectas o curvas) sobre cuadrículas de 10 x10, inicialmente. De los ejercicios planteados, se registran las formas como los estudiantes trazan, interceptan, reconocen, nombran y diferencian los caminos, rutas y las nociones topológicas a construir, a fin de identificar el desarrollo (dificultades, fortalezas) de las habilidades de percepción espacial como coordinación ojo-motriz y la percepción de relaciones espaciales. Otra de las maneras para registrar la información y evaluar la propuesta, se hace mediante la observación de los trabajos realizados por los estudiantes en sus cuadernos; además, se cuenta con los registros hechos por un maestro observador participante durante la primera parte de la implementación del trabajo.

Por otro lado, se analizan cada una de las intervenciones de los estudiantes (comentarios, preguntas, respuestas y acciones) a fin de destacar las formas como verbalizan las posibles soluciones a las actividades a desarrollar. Existe un *Cuaderno de diario* del docente, donde registra otros elementos que dinamizan el ambiente de aprendizaje matemático, como las interacciones que se dan entre los estudiantes al trabajar en grupo. Desde allí se inician los procesos de sistematización.

Los ajustes realizados estuvieron relacionados básicamente con el rediseño de algunas actividades planteadas. Por ejemplo, una de las actividades consistía en buscar ciertos lugares sobre el mapa, pero algunos estudiantes al no saber 'leer' se les dificultó el ejercicio, por tal razón fue necesario traer en esos casos ya señalados los lugares sobre el mapa para trazar rutas o caminos. La matriz ha iniciado un proceso de modificación, en cuanto se ha dado cabida a otras habilidades. No sólo se tienen en cuenta las de carácter visual, sino las de aplicación, dibujo y verbales expuestas por Jean Piaget.

El *cuarto momento* de la propuesta estuvo enmarcado por las reflexiones y análisis de resultados, entre los que se destacan:

- En la dinámica del ambiente de aprendizaje, generalmente los estudiantes modificaron en mayor o menor grado la programación e intenciones iniciales del maestro, en especial, cuando alguna pregunta, contenido, fenómeno o hecho, contradecía de una u otra forma lo que pensaban o sus vivencias de conocimiento. Por ello, generar retos y desafíos a los estudiantes, es un mecanismo importante para lograr despertar su interés y curiosidad, lo cual contribuye a la construcción del conocimiento matemático escolar.
- Se ha logrado en gran medida, transformar la mirada que tienen sobre el hacer matemático en el aula, especialmente de los niños, sus padres y algunos docentes, pues se evidencia en sus actitudes y mencionan en sus diálogos y discursos, que a la escuela se va más que a aprender las cuatro operaciones. Se ha comprendido (tanto por padres como por los estudiantes) que los individuos nos enfrentamos más a problemas espaciales que de carácter numérico en la vida diaria. En este sentido, los niños, los padres de familia y algunos docentes han logrado reconocer la importancia del desarrollo de las habilidades de percepción visual y geométrica en el proceso de apropiación espacial.

Es importante resaltar que los resultados esperados con la gran mayoría de estudiantes es satisfactorio, en tanto se evidencia la construcción de nociones y conceptos topológicos en el trabajo sobre las representaciones cartográficas y cambios en sus verbalizaciones, en el trabajo en grupo y en su actuar, según muestran los registros de las clases, no así con otros estudiantes que aún presentan dificultad en el desarrollo de algunas de sus habilidades de percepción espacial, principalmente las que implican el trazo de regiones, caminos, líneas, grafos (coordinación visomotriz, percepción de relaciones espaciales, percepción de figura-fondo). Es bueno destacar que la propuesta empezó a introducir en las actividades de la unidad didáctica, aspectos de la geometría de las transformaciones, es decir, lo relacionado con simetrías, giros, reflexiones y traslaciones de figuras geométricas, mapas de lugares y planos, entre otros, así como

el trabajo relacionado con Teselaciones y Mosaicos geométricos.

Un aspecto importante es que mi actitud frente a la enseñanza de la matemática escolar se ha ido transformando. En la búsqueda de organizar y programar actividades he apuntando al desarrollo de lo numérico y a los demás elementos que constituyen el pensamiento matemático. Se reconoce la importancia de la geometría para el análisis e interpretación de mapas y planos, y se observó que es posible desarrollar habilidades de percepción visual y conceptos geométricos en niños de Básica primaria.

Las actividades a desarrollar desde la unidad didáctica *Mapas, planos y rutas* representan un referente alternativo a la dinámica de la interacción con el docente, que propicia el desarrollo del razonamiento geométrico-espacial de los niños. Por ello ha surgido la necesidad de plantear otras unidades didácticas que se enfoquen al desarrollo de todos los elementos del pensamiento matemático.

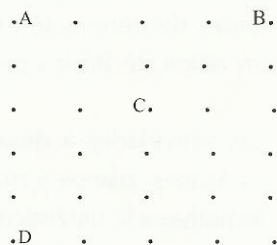
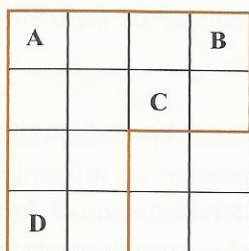
A raíz del proceso de integración institucional, surge la necesidad de socializar la propuesta a todas las sedes, y así de ampliar su impacto a nivel del nuevo núcleo. Por ello se han buscado espacios institucionales y pedagógicos para dar a conocer la propuesta a los demás docentes. Entre los aportes al PEI, *El mejor ambiente educativo*, está que se fortalecen los pilares que lo sustentan, es decir, el desarrollo de habilidades comunicativas con espíritu lúdico, las cuales forman parte del desarrollo de la percepción visual y de la geometría, en tanto, éstas son habilidades básicas para la comunicación (Sherard, 1976).

Experiencia en el aula.

Las actividades (Anexo 1)

- Actividades preliminares. Individualmente, localizar cuatro puntos sobre el papel en diferentes sitios y a través de líneas rectas trazar una (1) ruta cerrada o abierta con colores que los una. A continuación, repetir el ejercicio pero trazando la ruta mediante líneas curvas. Dibujar otras (5) posibilidades de ru-

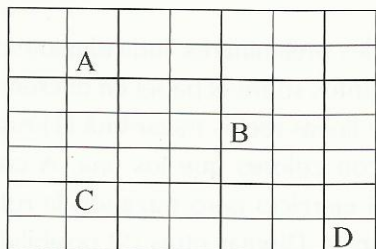
tas cerradas y abiertas que unan los mismos puntos, ya sea utilizando líneas rectas, curvas o combi-nándolas ambas. Dibujar una cuadrícula de 5x5 y ubicar cuatro puntos como aparecen a continua-ción. En seguida, trazando una ruta cerrada con líneas rectas unir cada uno de los puntos. Y en un geoplano de 5x5 dibujar la ruta que se forma, de manera *deslizada* teniendo en cuenta los mismos puntos como referentes.



Este mismo tipo de ejercicios preliminares se pueden hacer girando y reflejando otras figuras geométricas que se formen a partir de rutas cerradas trazadas.

- Desarrollo de la actividad. Organizar la clase por grupos de cuatro estudiantes y suministrar individualmente una fotocopia del mapa sobre el que se va a realizar el trabajo (ver Anexo 1) y plantear el siguiente interrogante:

En el mapa de una ciudad colombiana se localizan 4 estaciones de bus. Cada niño trazará las rutas más cortas entre los puntos de las estaciones A y B, B y C, C y D, A y D, B y D, A y C. Una vez trazados dichos recorridos, se les interrogará sobre cuál de esas rutas es la más corta y cuál la más larga. Es importante tener en cuenta los argumentos de los niños para dar sus explicaciones.




Anexo 2

Es preciso indicar a los niños que las rutas que se tracen no pueden interceptarse entre sí.

- Dibujar una ruta que pueda recorrer un bus, de manera que le sirva para llegar a todas las estaciones de la manera más rápida. Se toma como referente de salida cualquiera de las estaciones de los puntos A, B, C, D. No se puede repetir recorrido ni llegar a la misma estación dos veces.
- Interrogar acerca de cuántas y cuáles trayectorias de bus son posibles trazar de las estaciones por ejemplo, de A-B, B-C, D-C, A-D, y B-D.
- Utilizando esos mismos puntos como referentes para trazar rutas de forma triangular y cuadrilátera, por ejemplo:

Aquí podemos identificar un cuadrilátero de color azul, dos triángulos que se forman a partir de la unión de los puntos C y B (triángulos CBD y ACB). al unir los puntos ad se forman otros dos (2) triángulos ($\triangle ABD$ y $\triangle ACD$). A partir de esta actividad se podría introducir al estudiante en los conceptos de región, frontera, puntos interiores y exteriores.

Extensión

- En el plano de un salón de clase y de un barrio, ubicar una serie de puntos y trazar las rutas que proponga el maestro, ya sea por medio de líneas curvas o rectas.
- Sobre un mapa con coordenadas geográficas, localizar 10 ciudades capitales y repetir el anterior ejercicio (trazando recorridos entre ciudades de nuestro país). 

Referencias

- ANDER-EGG, E. Programación de aula. La planificación educativa. Conceptos, métodos, estrategias y técnicas para educadores. Argentina : Editorial Magisterio del Río de la Plata, 1996, p.p. 193-232.
- BISHOP, A. ¿Cuáles son algunos de los obstáculos para el aprendizaje de la geometría? *En* : Estudios en educación matemática. Enseñanza de la geometría. París : UNESCO, Vol.5, 1986.
- CASTAÑEDA, T. Introducción a la matemática contemporánea con ayuda del ordenador. La geometría dinámica en el aula de clase. (material de apoyo). Bogotá : Escuela Pedagógica Experimental (EPE), agosto de 2000.
- DEL GRANDE, J. Spatial Perception and Primary Geometry. *En* : Learning and Teaching Geometry, K-12. 1987.
- DICKSON, L. y otros. El aprendizaje de las matemáticas. Barcelona: Labor, 1991.
- DIENES, Z. P. y GOLDING, E. Juegos que conducen a una cierta comprensión de la geometría. *En* : Exploración del espacio y práctica de la medida. Barcelona : Teide, 1973.
- _____. Topología. Geometría proyectiva y afín. Barcelona : Teide, 1973.
- FROSTIG, M. y otros. Figuras y formas. Programa para el desarrollo de la percepción visual.
- GATTEGNO, C. El material para la enseñanza de las matemáticas. Madrid, 1974.
- LURCAT, L. El niño y el espacio. La función del cuerpo. México : FCE, 1979.
- MASON, J. y otros. Pensar matemáticamente. Barcelona : Labor, 1992.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá : Cooperativa Editorial Magisterio, 1998.
- _____. Estándares de educación Básica y Media en matemáticas y lenguaje. Bogotá, 2003.
- RIVEROS, M. y ZANOCCO, P. Geometría: aprendizaje y juego. Santiago de Chile : Universidad Católica de Chile, 1992.
- SAUVY, Jean y otros. El niño ante el espacio. Madrid : Artigrafía, 1980.
- SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DEL DISTRITO (SED). Desarrollo del pensamiento espacial y geométrico. Proyecto de evaluación de competencias básicas. Área de matemáticas. Bogotá, 1999.
- SEGURA, D. La construcción de la confianza. Bogotá : EPE-IDEP. Bogotá, 1999.
- _____. Coloquio de matemáticas. Bogotá, 1989.
- SHERARD, W. ¿Por qué es la geometría una habilidad básica? *En* : Revista Notas de Matemáticas, No. 29, abril de 1990.

Diálogo del conocimiento

Estamos frente a una experiencia que representa una alternativa en la educación matemática para los primeros años de escolaridad. El autor utiliza como escenario un espacio que aparentemente no tendría que ver con desarrollos matemáticos habituales, como lo es una unidad didáctica sobre planos, mapas y rutas; es justamente a partir de su intención de privilegiar el espacio desde las relaciones topológicas y de concebir más qué la clase de matemáticas, el desarrollo del pensamiento matemático en los niños, lo que conduce a que se reconozca esta propuesta.

Es importante destacar también que experiencias de aula como estas son una evidencia de haber reflexionado sobre el hacer matemático, usualmente, como el autor lo menciona, la escuela primaria se restringe al trabajo numérico, enfatizando en el manejo de los algoritmos de las operaciones básicas, y se deja de lado tanto el trabajo geométrico-espacial, como la posibilidad de presentar una comunicación matemática, tanto en la integración con otras disciplinas, como con el uso de algunos conceptos en situaciones de la cotidianidad de los niños.

En el mismo sentido, el artículo nos muestra a un profesor que además de pensar la matemática que pone en juego, sistematiza su hacer, planea sus clases, proyecta los resultados, hace seguimientos y propende por el trabajo en grupo. Es de destacar que a través del trabajo en equipos, los estudiantes construyen y aprenden de y con sus compañeros. Desde esta perspectiva el espacio de clase muestra dos tipos de búsqueda. Por un lado, la de los estudiantes que se disponen a realizar las actividades propuestas que surgen a partir de las inquietudes del maestro, y a manera de contagio pasan a convertirse en retos para ellos; y, por otro, las del maestro que se reflejan en la sistematización de una propuesta innovadora.

Ahora bien, resulta gratificante una experiencia como esta, ante el panorama aún prevalece para algunos de la matemática como una disciplina terminada, de resultados exactos y asociados exclusivamente al trabajo numérico. Los planos, los mapas y las rutas son una excusa para acercarnos a relaciones topológicas; pero también son una invitación para generar propuestas innovadoras que permitan sacar a la matemática de ese lugar tan restringido, al cual lamentablemente todavía algunas prácticas escolares la tienen.

Janeth Malagón Mayorga