Análisis de la disonancia tonal en el Preludio y Fuga en do menor de Johan Sebastian Bach

Analysis of Tonal Dissonance in the Prelude and Fugue in C Minor by Johann Sebastian Bach

David Alexander Paque-Burgos[1]

Cómo citar este artículo:
Paque Burgos, D. A. (2024). Análisis de la disonancia tonal en el Preludio y Fuga en do menor de Johan Sebastian Bach. *Pre-Impresos Estudiantes*, (25), 55-67.

Resumen

Desde niño siempre tuve un gran interés por la música. Escuchando a tantos artistas, me preguntaba por qué algunas piezas impactan nuestras emociones. ¿Tendrá algo que ver con las propiedades físicas de los sonidos y sus combinaciones?, ¿o será la cultura y nuestra percepción las que influyen en cómo experimentamos la música? Estas preguntas me llevaron a indagar una forma más científica y objetiva de entender la música, pues siempre estamos rodeados de sonidos. Algunos nos resultan más agradables que otros, y debe existir una forma de medir qué tan consonantes o disonantes (agradables y desagradables) son estos para nosotros. Esta inquietud me llevó a estudiar la relación entre las propiedades físicas del sonido y nuestra percepción psicológica de él. A partir de mi interés personal por la música y mi formación científica, me propuse desarrollar e implementar un modelo para medir la consonancia de una pieza musical. Para realizar este trabajo, decidí analizar la armonía musical (notas musicales que se encuentran a un intervalo de frecuencia determinado y se tocan en simultáneo) del preludio en do menor de J. S. Bach, usando el modelo de funciones de disonancia de Sethares. Este modelo, originalmente diseñado para melodía (notas musicales que se encuentran a un intervalo de frecuencia determinado y se tocan de forma secuencial), me permitió calcular un valor de disonancia para toda la pieza y establecer si la obra era percibida como agradable o no para un oyente. En el preludio de Bach —que pertenece al periodo barroco caracterizado por un estilo musical de gran complejidad y ornamentación—, la riqueza de detalles contribuye a que presente un notable nivel de disonancia.

Palabras clave: disonancia; psicoacústica; armonía y melodía; tonos puros y complejos; frecuencia

Abstract

Since childhood, I have always had a deep interest in music. While listening to many artists, I often wondered why certain pieces have such a strong emotional impact. Could it be related to the physical properties of sounds and their combinations? Or is it culture and perception that shape how we experience music? These questions led me to explore a more scientific and objective way of understanding music, especially since we are constantly surrounded by sounds. Some are more pleasant to us than others, and there must be a way to measure how consonant or dissonant (pleasant or unpleasant) these sounds are for us. This curiosity led me to study the relationship between the physical properties of sound and our psychological perception of it. Driven by my personal interest in music and my scientific background, I set out to develop and implement a model to measure the consonance of a musical piece. To carry out this work, I chose to analyze the musical harmony (musical notes that occur at a certain frequency interval and are played simultaneously) in the Prelude in C Minor by J. S. Bach, using Sethares' dissonance function model. This model, originally designed for melody (musical notes at a specific frequency interval played sequentially), allowed me to calculate a dissonance value for the entire piece and determine whether the work would be perceived as pleasant or not by a listener. In Bach's Prelude —which belongs to the Baroque period, characterized by a highly complex and ornamented musical style—, the richness of detail contributes to a notable level of dissonance.

Keywords: dissonance; psychoacoustics; harmony and melody; pure and complex tones; frequency

1 Magíster en Física por la Universidad Nacional de Colombia (UNAL), Licenciado en Física (UPN) y actualmente doctorando en Física (UNAL). Experiencia en acústica, redes complejas y Psicofísica. Investigador en Sociofísica y Econofísica. Manejo de Python Jupyter Notebook para análisis de datos. Habilidades en comunicación para transmitir conceptos científicos en entornos académicos y profesionales. dapaqueb@unal.edu.co

Introducción

En este trabajo, se estudian las propiedades de consonancia asociadas a acordes musicales. Se analiza el Preludio y fuga en do menor de J. S. Bach para ilustrar la disonancia en relación con las progresiones de acordes de esta obra. Inicialmente, se realiza una introducción a las generalidades de la teoría musical, explorando cómo se estructuran las notas musicales en escalas y cómo estas se han refinado a lo largo de la historia, considerando las necesidades creativas de intérpretes y compositores. El concepto de escala es de real importancia en la teoría musical, ya que los intervalos con los que se construyen tienen distintos niveles de consonancia según sean las relaciones matemáticas entre las frecuencias de sus componentes, especialmente la fundamental que corresponde a la frecuencia más baja.

Luego, se abordará desde un punto de vista más técnico el concepto de disonancia tonal a la luz de las características físicas de las ondas y con esto se estructurará el modelo de disonancia propuesto por Sethares. Con base en lo anterior, se procederá a analizar la pieza "Preludio y Fuga" de Bach utilizando la señal de audio de la obra para rastrear la evolución temporal de la disonancia. Además, se empleará un enfoque alternativo para medir la disonancia a través de la estructura armónica. En este caso, se calculará la disonancia de los acordes presentes en cada compás.

Este trabajo responde a mis intereses personales relacionados con la música y su explicación científica, ya que, como lo mencioné anteriormente, los interrogantes que generan para mí las estructuras de composición y la percepción auditiva del oyente son muchos. ¿Cómo se relacionan las características específicas de la disonancia en la obra de Bach con las teorías contemporáneas sobre la percepción de la disonancia y la consonancia?, ¿en qué medida el análisis de la evolución temporal de la disonancia en la pieza puede proporcionar nuevas perspectivas sobre las técnicas compositivas?, ¿qué limitaciones y desafíos se presentan al medir la disonancia en una obra musical histórica utilizando métodos modernos de análisis de audio?

La integración del modelo de disonancia de Sethares y el estudio de la evolución temporal de la disonancia en la obra de Bach no solo responderán a preguntas sobre las técnicas compositivas del Barroco, sino que también aportarán nuevas perspectivas sobre cómo estas prácticas históricas se relacionan con las teorías contemporáneas. Este enfoque ofrece una visión amplia sobre la interacción entre teoría musical y percepción auditiva, que contribuye a una comprensión más completa de la música y su impacto emocional en el oyente.

Cómo nace la música y cómo se estructura

A continuación, haré una breve introducción a los conceptos musicales de tonalidad, intervalo, escala y acordes. Es fundamental que el lector esté familiarizado con estos términos, ya que aparecerán a lo largo del texto para estructurar la finalidad de la investigación.

La *tonalidad*, definida por Herrera (1995) como el conjunto de sonidos regidos por un sonido principal (tónica), es un concepto clave en la música. Si bien la estructura de la tonalidad se basa en siete sonidos (escala musical), la manera como se combinan y relacionan presenta muchos matices y depende de las tradiciones musicales en cada cultura. Esta diversidad demuestra la flexibilidad y adaptabilidad de la tonalidad como sistema de organización sonora (Miyara, 2005).

> Cada par de notas de una escala tiene asociado un *intervalo*, caracterizado por una distancia entre las notas. Este concepto es de real importancia en el desarrollo de la teoría musical ya que diferentes culturas han usado diferentes intervalos para la construcción de escalas características.

El estudio de los intervalos musicales y sus propiedades se atribuye en principio a Pitágoras. En aquella época, los intervalos se construían con razones de frecuencias fundamentales que correspondían a proporciones entre números enteros. Sin embargo, esta forma de construir los intervalos presentaba algunos problemas en las prácticas musicales, como la transposición de una melodía a diferentes tonalidades, pues para lograr esto era necesario transportar la escala completamente, lo que era poco práctico (Miyara, 2005).

Un resultado de este cambio en la *escala* fue variar la frecuencia de las notas, estas relaciones se estudian mediante un instrumento musical llamado monocordio, el cual consiste en una cuerda tensada de sus extremos con un pivote en el centro que puede ser desplazado a lo largo de la cuerda, cambiando su distancia y por ende el sonido que produce al hacerla vibrar; si una cuerda posee una frecuencia de vibración f, al dividirla en n partes su frecuencia sería nf.

Gracias a este sistema desarrollado por Pitágoras se modelaron relaciones entre la longitud de la cuerda y su frecuencia, y se demostró cómo los sonidos producían sensaciones de agrado o desagrado al ser tocados de forma simultánea. Esto permitió sentar las bases para los conceptos fundamentales de consonancia y disonancia tonal.

Si tomamos una frecuencia base f_1 y la ejecutamos en simultáneo con su octava perfecta $2f_1$ el oyente percibirá como agradable estos dos sonidos, a esta sensación auditiva se le conoce como consonancia. Una de las explicaciones a este fenómeno entre sonidos está basada en el apareamiento que tienen los armónicos del primer sonido y el segundo sonido ejecutado, de aquí se deduce que la octava es el intervalo más consonante de todos. De esta misma forma también se puede dar explicación al fenómeno de disonancia, el cual se relaciona con la percepción de desagrado que tiene el oyente al escuchar dos sonidos en simultáneo, esto debido a que los armónicos del par de sonidos ejecutados no coinciden entre ellos y se genera una superposición en las regiones de resonancia de estos, lo que provoca el fenómeno de batidos (Roederer, 1997), de aquí la sensación de desagrado percibida por el oyente.

Estas interacciones entre dos sonidos simultáneos se pueden expresar partiendo de una relación matemática entre las frecuencias de los dos sonidos:

$$\frac{f_1}{f_1'} = \frac{n}{m}$$

Donde f_1 y f'_1 son las frecuencias fundamentales, n y m son números enteros. Para lograr obtener relaciones de consonancia entre dos sonidos, Pitágoras encontró que es necesario que las frecuencias fundamentales estén a razón de números enteros y estos sean tan pequeños como sea posible (Helmholtz, 1954; Roederer, 1997).

Al concepto de escala, ya definido como una sucesión de sonidos organizados, adicionamos una regla más para poder construir una escala. Básicamente los sonidos en esta escala deben cumplir relaciones de consonancia entre ellos. Según este criterio, encontramos tres escalas muy importantes en el desarrollo de la teoría musical (justa, pitagórica y temperada):

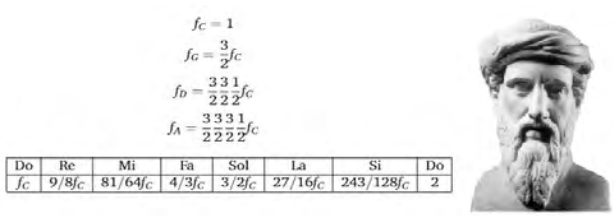
La *escala justa* se construye aplicando un patrón específico de intervalos de tonos (T) y semitonos (S) a partir de una nota fundamental. Los intervalos más consonantes con respecto a la tónica son: unísono, octava, quinta y cuarta (Plomp y Levelt, 1965). Se parte de estos intervalos para la estructura de la escala justa, siendo cuidadosos se busca obtener el máximo número de consonancias posibles.

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
f_C	$9/8f_C$	$5/4f_C$	$4/3f_C$	$3/2f_C$	$5/3f_C$	$15/8f_C$	$2/1$

Si tomamos los $5/4$ de la nota mi y los dividimos entre los $9/8$ de re obtenemos la distancia de $10/9$, lo que nos muestra que la distancia entre tonos no es igual, ya que entre do y re hay $9/8$ de distancia. El inconveniente real que presenta esta escala se encuentra en el momento de realizar una modulación a otra tonalidad, ya que no se conserva la misma distancia entre intervalos, lo cual impide construir instrumentos de notas fijas en los que se puede transportar música a otras tonalidades. Tendríamos que desafinar el instrumento y realizar este mismo proceso, lo cual sería poco práctico en la composición.

Mientras que, en la escala justa, el objetivo era minimizar las disonancias al construir los intervalos, la construcción de la escala pitagórica se basa en las consonancias perfectas. Esta escala se fundamenta en la superposición de quintas, partiendo de una nota base. A partir de ella, se busca su quinta justa, lo cual se logra multiplicando por la relación 3/2, obtenida de la tabla anterior. Este proceso se repite sucesivamente para determinar las quintas de cada nuevo tono generado (Véase figura 1)

Figura 1. Escala pitagórica.



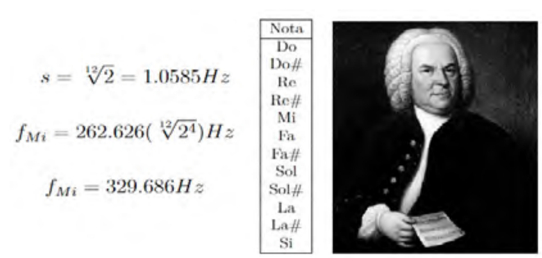
Fuente: Elaboración propia, con https://www.biografiasyvidas.com/biografia/p/pitagoras.htm*)*

Para lograr que los sonidos se encuentren a la misma octava y la escala quede, por decirlo de alguna manera, simétrica, se debe multiplicar o dividir por 2.

Como resultado final, se tiene que la distancia entre DO-RE, RE-MI, FA-SOL, SOL-LA y LA-SI equivaldría a $9/8$, mientras que entre MI-FA y SI-DO es de $256/243$. Gracias a este artefacto matemático obtenemos intervalos de un tono $9/8$, y de semitono $256/243$ (Herrera, 1995; Roederer, 1997). Uno de los problemas de la escala pitagórica es la ligera diferencia entre frecuencias de la misma nota cuando se usan direcciones diferentes para llegar a esta; la razón de frecuencia entre estas dos notas se conoce como la coma pitagórica.

Para evitar los problemas anteriormente mencionados, relacionados con la modulación a otras tonalidades y construcción de instrumentos de notas fijas, se propuso una escala con intervalos a la misma distancia entre ellos conocida como la escala de *temperamento igual*. Gracias a esta uniformidad, encontramos en una octava doce semitonos que cumplen la condición antes mencionada con una distancia como la que se muestra en la figura 2.

Figura 2. Escala temperada o de temperamento igual.



*Fuente: Elaboración propia, con información de (*https://liberliber.it/autori/autori-b/johann-sebastian-bach/*)*

Tomemos como ejemplo el do4, esta nota tiene una frecuencia de 262 626 Hz, si queremos calcular la frecuencia a la que se encuentra la nota mi básicamente multiplicamos la frecuencia de referencia (do4) por la medida de cada semitono elevado al número de semitonos que hay entre do y mi. Usando la tabla anterior obtenemos 4 semitonos desde nuestra nota de referencia.

$$f_{Mi} = 262.626(\sqrt[12]{2})^4$$

$$f_{Mi} = 329.686Hz$$

En 1722, Johann Sebastian Bach publica *El clave bien temperado*, que demuestra la eficiencia de este modo de afinación al componer obras en las tonalidades que proporciona la escala cromática.

¿Qué tan agradable nos resulta lo que escuchamos?

La consonancia y disonancia son conceptos fundamentales en la música, estos hacen referencia a la relación entre las notas de una escala musical y cómo estas se combinan. La consonancia se asocia con sensaciones agradables en la música, que suelen transmitir una sensación de calma. Por otro lado, la disonancia genera tensión y une a las notas de manera que provocan una necesidad de resolución, lo cual crea interés y dinamismo en la música. Comprender estas dos nociones es esencial para apreciar la estructura y la emotividad de las composiciones musicales, ya que juegan un papel crucial en cómo experimentamos la música.

Como se mencionó con anterioridad, uno de los fundadores de la teoría de la consonancia fue Pitágoras, ya que a través del monocordio estudió las relaciones entre sonidos. La sensación auditiva por la superposición de estos sonidos puede ser clasificada por el receptor como agradable o desagradable, sin embargo, estas consideraciones se basan en una percepción subjetiva del sonido. Posteriormente, Hermann von Helmholtz creía que existe una relación directa entre el lugar de máxima excitación en la membrana basilar y el tono que es percibido por el sonido (Sethares, 2005). De esta manera, una onda compleja es captada por el oído, llega al tímpano y a los huesos del oído, la cóclea y en su interior, por último, a la membrana basilar, en donde se estimulan sectores que se encuentran relacionados con la frecuencia (Rossing, 2013; Sethares, 2005). En la base de la membrana basilar sobre la ventana oval, resuenan las frecuencias más altas, y las bajas frecuencias en el vértice de la cóclea conocido como ápex, el cual es de mayor grosor que la base de la ventana oval. (Véase figura 3)

Figura 3. Estructura del oído y Hermann von Helmholtz.

Fuente: Elaboración propia con información de https://es.wikipedia.org/wiki/Hermann_von_Helmholtz

Hay dos situaciones a las que se debe prestar atención. La primera, la percepción del sonido por un oyente, tomando el fenómeno de percepción como un hecho meramente subjetivo, y la segunda, relacionada con el fenómeno físico asociado a dicha percepción. A partir de aquí se pone en evidencia un importante interrogante: ¿Por qué escuchamos lo que escuchamos al escuchar un estímulo acústico? (Roederer, 1997). Establecer el puente que conecta las dos situaciones es el objetivo de la psicoacústica y, con ello, poder realizar predicciones sobre las sensaciones producidas en un determinado órgano receptor y la percepción que tiene el sujeto de este estímulo a partir de condiciones como la altura y el volumen.

Se entiende, a partir de la explicación elaborada por Helmholtz, cómo llega el sonido al oído y cómo se perciben los sonidos de diferentes frecuencias hasta clasificarlos en agudos y graves sin mayor dificultad, asumiendo que existe una relación directa entre el lugar de máxima excitación en la membrana basilar y el sonido que el oído percibe. También propuso una explicación de consonancia y disonancia a partir del concepto de *batido* cuando se superponen dos sonidos. Para Helmholtz la disonancia es causada por los batidos de los parciales entre los tonos complejos involucrados, de forma análoga la consonancia sería la ausencia de estos (Roederer, 1997; Sethares, 2005).

Con base en la mecánica ondulatoria, se puede describir la superposición de dos tonos a partir de la suma de dos ondas de frecuencia f_1 y f_2, si se asume que tienen la misma amplitud y constante de fase, obtenemos:

$$y_1 = Acos(kx_1 - \omega t + \phi_1)$$

$$y_2 = Acos(kx_2 - \omega t + \phi_2)$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right] cos\left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right]$$

$$y = 2Acos\left[\frac{1}{2}(\Delta\phi + k\Delta x)\right] cos\left[\frac{1}{2}k(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}k(\phi_1 + \phi_2) - \omega t\right]$$

$$A' = 2Acos\left[\frac{1}{2}(\Delta\phi + \Delta x)\right]$$

$$y = A'cos\left[\frac{1}{2}k(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}k(\phi_1 + \phi_2) - \omega t\right]$$

Donde ϕ_1 = Constante de fase de la primera onda, ϕ_2= Constante de fase de la segunda onda, k = Número de onda, ω = Frecuencia angular, x_1= posición de la onda 1, x_2 = posición de la onda 2, $\Delta\phi$ = Diferencia de fases y Δx = Diferencia posición.

Teniendo en cuenta la superposición de dos ondas, podríamos encontrar las siguientes situaciones en relación con sus parámetros.

1. Si las frecuencias y las fases son iguales, pero hay diferencia de amplitud, la amplitud resultante será la suma de las amplitudes $A_T = A_1 + A_2$
2. Cuando la diferencia entre frecuencias es grande, existe una separación entre las zonas de resonancia de la membrana basilar, en consecuencia, se perciben los dos tonos por separado con sus respectivas alturas, el oído puede discriminar las frecuencias (Helmholtz, 1954; Roederer, 1997; Sethares, 2005).
3. Si las amplitudes son las mismas pero las frecuencias tienen una pequeña diferencia $f_1 \neq f_2$ se genera un patrón vibratorio intermedio f_1, f_2 conocido como batido, este se vuelve más lento a medida que los dos tonos se acercan (Roederer, 1997; Sethares, 2005).
4. Si hay una diferencia de fases que cambian con respecto al tiempo, causa que la amplitud resultante también cambie. Esta amplitud varía entre A_1 y A_2 con una frecuencia equivalente a la diferencia entre las dos frecuencias $f_1 - f_2$ y estas variaciones generan el fenómeno de batido. Análogamente $\Delta f = 0$ y si las amplitudes son las mismas, no se percibe el batido (Rossing, 2013; Sethares, 1993). La frecuencia del batido se puede calcular:

   $$\Delta f = f_1 - f_2$$

   El valor promedio entre los dos tonos con una Δf pequeña arroja la frecuencia del patrón vibratorio resultante

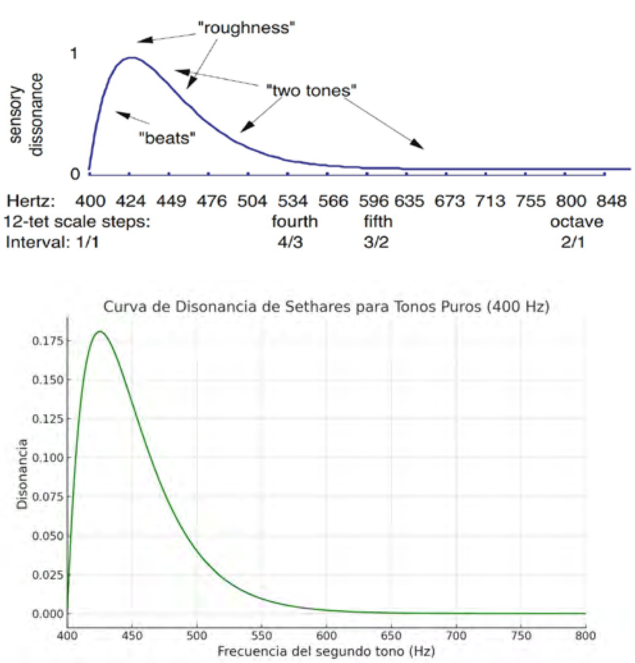
   $$f = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

5. Cualquier sonido puede descomponerse en parciales, la disonancia provocada entre dos tonos es causada por los batidos rápidos entre dos parciales (Sethares, 2005).

Como se conceptualizó anteriormente, el fenómeno de batido se genera cuando las frecuencias entre dos ondas superpuestas son muy pequeñas, los efectos de este batido pueden ser percibidos como desagradables por el oyente y esta sensación es conocida como disonancia. Para diferencias de frecuencia menores a los 10 Hz, el fenómeno de batido se puede percibir, pero cuando estas ssobrepasan los 15 Hz la sensación desaparece (Rossing, 2013).

Plomp y Levelt (1965) realizaron posteriores investigaciones importantes en el campo de la psicoacústica, específicamente en el estudio de la percepción auditiva y la disonancia tonal. Su trabajo se centró en cómo percibimos la consonancia y la disonancia de las combinaciones de tonos. A partir de sus experimentos obtuvieron curvas de disonancia como concepto fundamental en su investigación. Estas curvas representan cómo varía la disonancia percibida en función de la frecuencia y la relación de tonos que se combinan (Véase figura 4).

Figura 4. Curva de disonancia sensorial de Plomp y Levelt.



Fuente: Elaboración propia

Estas curvas de disonancia obtenidas en las investigaciones de Plomp y Levelt fueron refinadas y analizadas por William Sethares. Su trabajo se caracteriza por formalizar matemáticamente estas curvas, a partir de la elaboración de una función para describir la curva en términos de dos ondas puras con una amplitud y frecuencia específica cada una, $d\ (f_1, f_2, l_1, l_2)$.

$$d(x) = e^{-ax} - e^{-bx}$$

x representa la diferencia de frecuencia entre dos tonos puros y los parámetros a, b las razones en las que la función aumenta o disminuye. Esta función de disonancia se puede expresar también en términos de las frecuencias base y sus correspondientes amplitudes, la disonancia entre dos tonos puros con f_1, A_1 y f_2, A_2 para $f_1\ , < f_2$ es:

$$d(f_1, f_2, A_1, A_2) = A_{12}\left[e^{-as(f_2-f_1)} - e^{-bs(f_2-f_1)}\right]$$

Si A_1 y A_2 se aproximan a cero, el producto entre estas dos amplitudes disminuye y la disonancia en la ecuación desaparece. Este producto de amplitudes hace referencia a la sonoridad mínima percibida entre las dos alturas ejecutadas según el modelo de Sethares. El parámetro s permite que una única forma funcional se interpole entre las distintas curvas, moviendo la curva de disonancia a lo largo del eje de frecuencias para que comience en f_1 , esto permitirá encontrar la frecuencia más adecuada; se realiza un ajuste por mínimos cuadrados para determinar los valores de s_1 y s_2, donde d* es la disonancia máxima entre dos tonos puros. (Ball, 2012; Sethares, 1993)

$$s = \frac{d*}{(s_1 f_1 + s_2)}$$

El trabajo de Sethares permite entender las propiedades de disonancia entre dos intervalos a partir de las características físicas del sonido. Este modelo se basa en la interacción de los armónicos de dos notas tocadas simultáneamente, considerando cómo los parciales de una se alinean o superponen con la otra. Con ello obtenemos que los intervalos más consonantes, como la octava o la quinta justa, tienen parciales que se alinean de manera más armoniosa, generando menos distorsión perceptible; mientras que los intervalos disonantes, como el tritono o la segunda menor, causan mayor interferencia, ya que sus parciales no se alinean de manera eficiente, lo que produce una sensación auditiva de tensión. Con base en este modelo, se admite que las relaciones de consonancia se pueden medir cuantitativamente a partir de la cantidad de distorsión que resulta de la interacción de las frecuencias entre notas tocadas en simultáneo.

Entonces, ¿qué pasa con Bach y su forma de componer?

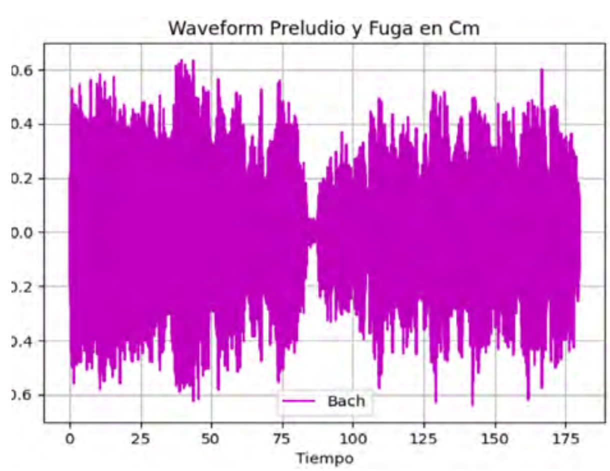
Para realizar el respectivo análisis de consonancia seleccioné *Prelude and Fugue BWV 847 en do menor* de J. S. Bach, esta pieza hace parte de su obra *El clave bien temperado*, su importancia radica en la introducción del temperamento igual. Bach plasma en los diferentes preludios y fugas el uso de las diferentes tonalidades de una escala del mismo temperamento, teniendo en cuenta acordes mayores y menores para el desarrollo de la obra. Con ello se demuestra la eficacia que tiene el uso del mismo temperamento en un instrumento sin necesidad de realizar ajustes en su afinación. Esta obra de la música académica tiene una gran relevancia en cuanto a su estructura armónica y uso de la tonalidad. Aplicaremos como herramienta la función de disonancia propuesta por Sethares, ya mencionada, con el fin de encontrar las relaciones de consonancia de esta obra. (Véase figura 5)

Figura 5. Clavecín y J. S. Bach.

Fuente: https://www.analitica.com/entretenimiento/musica/juan-sebastian-bach-y-su-musica-para-piano/

Se usará un archivo de audio WAV, este tiene una duración aproximada de 3 minutos y la ejecución de la pieza está a cargo de la pianista belga Nathalie Matthys. A continuación, obtenemos la respectiva *waveform* (relación entre amplitud y tiempo) del archivo de audio en Python (Véase figura 2); se utilizará una frecuencia de muestreo de 22 050 Hz y así se obtienen 3 969 000 puntos para analizar la obra. Posteriormente, se divide el archivo en 10 000 ventanas, las cuales tienen una longitud de 400 puntos.

Figura 6. Waveform del preludio y fuga en Cm de J. S. Bach.



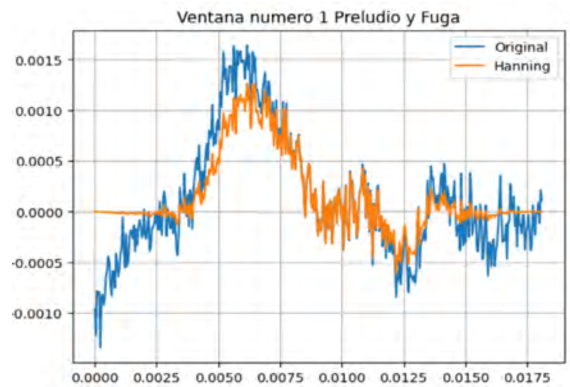
Fuente: Elaboración propia

Estos puntos representan intervalos de tiempo de 0,0175 segundos del archivo, a cada ventana se le aplicará una FFT (Transformada rápida de Fourier) para la obtención de sus respectivas frecuencias y calcular la disonancia con respecto al tiempo. Para amortiguar las colas de cada una de las ventanas y que no aparezcan frecuencias no deseadas en el cálculo de las disonancias multiplicamos cada ventana por una función Hamming:

$$h(t) = 0.54 - 0.46cos\left(\frac{2\pi t}{N-1}\right)$$

Con lo cual se obtiene para la primera ventana del preludio la señal amortiguada (Véase figura 7).

Figura 7. Ventana 1 multiplicada por una Hamming del preludio y fuga en Cm de J. S. Bach.



Fuente: Elaboración propia

Figura 8. FFT de las 10 000 ventanas del preludio y fuga en Cm de J. S. Bach.

	Freq Ventana	Puntos FFT	0	1	2	3	4	5	6	7	...	9912	9913	9914	9915	9916	9917
0	0.000	0	0.06324	0.02299	0.05973	0.10692	0.04354	0.06651	0.13088	0.09630	...	0.08533	0.17182	0.13564	0.14458	0.22348	0.05711
1	55.125	1	0.07380	0.03474	0.05159	0.14676	0.08422	0.05753	0.15558	0.18334	...	0.55966	0.24754	0.24477	0.18824	0.28393	0.15534
2	110.250	2	0.06011	0.02766	0.02125	0.06540	0.02033	0.04879	0.07671	0.09154	...	0.84869	0.73676	0.23732	0.36667	0.46142	0.36565
3	165.375	3	0.02764	0.02240	0.04558	0.03604	0.03626	0.05572	0.04991	0.01443	...	0.80893	0.42587	0.26612	0.16558	0.58703	0.51350
4	220.500	4	0.02477	0.02470	0.04729	0.03652	0.02126	0.03548	0.07323	0.03310	...	0.73093	0.85662	1.10627	0.16833	0.24813	0.56556
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
195	10749.375	195	0.00027	0.00034	0.00009	0.00007	0.00013	0.00016	0.00011	0.00018	...	0.00001	0.00000	0.00001	0.00003	0.00015	0.00002
196	10804.500	196	0.00014	0.00012	0.00015	0.00007	0.00001	0.00006	0.00003	0.00005	...	0.00001	0.00001	0.00000	0.00003	0.00004	0.00001
197	10859.625	197	0.00005	0.00002	0.00009	0.00006	0.00002	0.00004	0.00003	0.00005	...	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00006	0.00001
198	10914.750	198	0.00004	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00002	0.00003	0.00003	...	0.00000	0.00000	0.00000	0.00002	0.00003	0.00001
199	10969.875	199	0.00001	0.00000	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	0.00001	...	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00001	0.00000

Fuente: Elaboración propia

De acuerdo con la información anterior, obtenemos la disonancia de la obra considerando la respectiva combinatoria de frecuencias y amplitudes para cada una de las 10 000 ventanas usando la función de disonancia propuesta por Sethares (Véase figura 9).

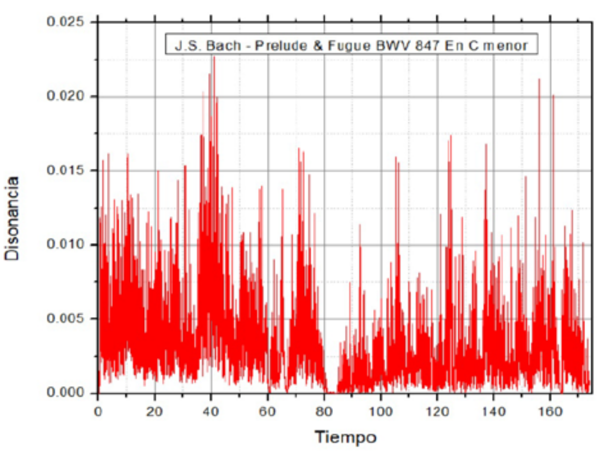
Figura 9. Disonancia de las 10 000 ventanas del preludio y fuga en Cm de J. S. Bach.

	F1	F2	A1	A2	A1*A2	F_{1}	F_{2}	F_{2} - F_{1}	s	d	dN
0	55.125	110.250	0.07380	0.06011	0.004436	55.125	110.250	55.125	0.011940	3.394617e-04	3.069637e-06
1	55.125	165.375	0.07380	0.02764	0.002040	55.125	165.375	110.250	0.011940	1.903749e-05	1.721496e-07
2	55.125	220.500	0.07380	0.02477	0.001828	55.125	220.500	165.375	0.011940	1.765361e-06	1.596356e-08
3	55.125	275.625	0.07380	0.01453	0.001072	55.125	275.625	220.500	0.011940	1.037335e-07	9.380267e-10
4	55.125	330.750	0.07380	0.01252	0.000924	55.125	330.750	275.625	0.011940	8.889494e-09	8.038467e-11
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1041805	1378.125	2094.750	0.61676	1.04817	0.646469	1378.125	2094.750	716.625	0.005054	1.947208e-06	1.760794e-08
1041806	1378.125	2149.875	0.61676	0.87878	0.541996	1378.125	2149.875	771.750	0.005054	6.140850e-07	5.552962e-09
1041807	1433.250	2094.750	0.62409	1.04817	0.654152	1433.250	2094.750	661.500	0.004935	6.897063e-06	6.236780e-08
1041808	1433.250	2149.875	0.62409	0.87878	0.548438	1433.250	2149.875	716.625	0.004935	2.225962e-06	2.012862e-08
1041809	2094.750	2149.875	1.04817	0.87878	0.921111	2094.750	2149.875	55.125	0.003851	1.654643e-01	1.496237e-03

Fuente: Elaboración propia

A partir de la información de disonancia normalizada se puede calcular la evolución temporal de esta con respecto al tiempo de toda la pieza. En la figura 10 se ilustra la disonancia para 10 000 ventanas (0,175 s. por intervalo de disonancia).

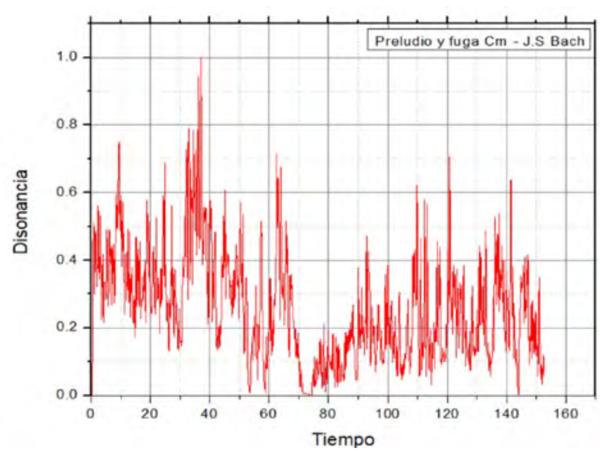
Figura 10. Gráfica de disonancia con respecto al tiempo del Preludio y Fuga en Cm de Bach con intervalos de 0,0175 s.



Fuente: Elaboración propia

Para obtener una mejor interpretación de los datos se usan segmentos de 0,2 segundos calculados con el promedio de aproximadamente 13 puntos de los respectivos valores de disonancia. Se puede observar en la figura 11 un punto de máxima disonancia cerca del segundo 40 debido al acorde de séptima de dominante que se ejecuta en ese momento. Este tipo de acorde tiene la mayor cantidad de disonancia en comparación con los demás por su separación entre sus 4 alturas. También se puede observar una ligera separación en el segundo 83, esta es debida al cambio del preludio a la fuga cuando la pianista realiza una pausa.

Figura 11. Gráfica de disonancia con respecto al tiempo del Preludio y Fuga en Cm de Bach con intervalos de 0,2 s.



Fuente: Elaboración propia

Cálculo de la disonancia con base en la partitura

Para los objetivos de este trabajo es necesario entender cómo funciona la disonancia para los acordes de tres notas, estos se componen superponiendo intervalos de tercera consecutivos a partir de una escala determinada. (Véase figura 12).

Figura 12. Escala de do mayor.

Notas	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Grados	I	II	III	VI	V	VI	VII	VIII

Fuente: Elaboración propia

Se construirá un acorde sobre el primer grado o también llamado fundamental (do), la primera tercera superpuesta es mi (III) y la tercera de esta es sol (V). Si obtenemos los acordes para cada grado de la escala de do superponiendo terceras y teniendo en cuenta el tipo de intervalos:

- Los acordes mayores tienen la tercera mayor y la quinta justa. Para el análisis propuesto más adelante se denotará el acorde mayor con una letra mayúscula en el cifrado internacional, por ejemplo: sol mayor: G
- Los acordes menores tienen la tercera menor y la quinta justa, al igual que el acorde mayor, para el acorde menor la notación usada será: la menor = Am
- Los acordes disminuidos tienen la tercera menor y la quinta disminuida. Para el acorde disminuido la notación usada será: re disminuido = Ddis

Un caso especial cuando hablamos de un acorde de tres notas es la "inversión", esta se refiere a la forma como estas notas están organizadas o distribuidas. Un acorde puede estar en diferentes "inversiones" según qué nota esté en la posición más baja.

Acorde en posición raíz: La nota más baja es la nota raíz del acorde. Por ejemplo, en un acorde de do (C), la nota más baja es do.

Primera inversión: La nota más baja es la tercera del acorde. En el caso del acorde de do, la nota más baja sería mi (la tercera nota del acorde).

Segunda inversión: La nota más baja es la quinta del acorde. En el acorde de do, la nota más baja sería sol (la quinta nota del acorde).

Para obtener la disonancia de un acorde basta con sumar las disonancias calculadas a partir del modelo de Sethares, esto es, calcular la disonancia de la primera-segunda nota, de la primera-tercera, y finalmente la segunda-tercera. Después, basta con sumar los valores de disonancia de estas contribuciones para obtener la disonancia total del acorde.

A continuación, tomaremos como ejemplo el primer acorde que aparece en el primer compás de la obra Gymnopédie n.º 3 del compositor Erik Satie en el arreglo para guitarra clásica realizado por John Philip Dimick (Véase figura 13).

Figura 13. Acorde de la menor en la obra Gymnopédie n.º 3.

Fuente: Elaboración propia

El acorde está compuesto de tres sonidos que se ejecutan en simultáneo: C4, E4 y A4 y sus frecuencias fundamentales en Hertz son, respectivamente, 554,7, 659,26 y 880. Al calcular la disonancia (D) total, obtenemos la siguiente forma funcional:

$$D_{Acorde} = \left\langle d_{C4-E4} \right\rangle + \left\langle d_{C4-A4} \right\rangle + \left\langle d_{E4-A4} \right\rangle$$

Para realizar el respectivo análisis de la obra de Bach tendremos en cuenta la tonalidad en la que está estructurada y así entender su desarrollo armónico en cada uno de los compases, la pieza está en do menor y su respectiva escala armonizada en triadas se muestra en la figura 14.

Figura 14. Distribución de acordes escala de do menor.

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si
IMin	IIDis	IIIbMaj	IVMin	VMin	VIbMaj	VII bMaj

Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si
IMin	IIDis	IIIbMaj	IVMin	VMin	VIbMaj	VII bMaj

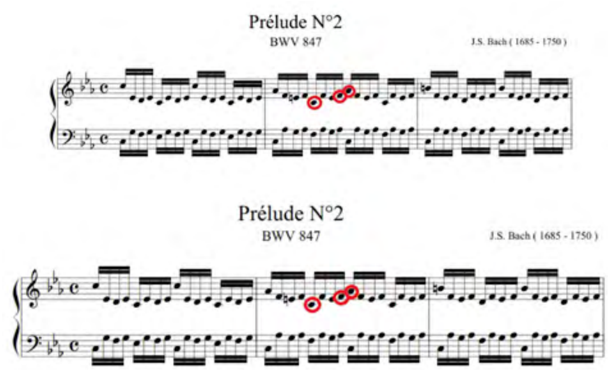
Fuente: Elaboración propia

Aclaración:

Para entender el comportamiento del preludio se debe centrar la atención en los pulsos de cada compás y su respectiva métrica. Observamos que en los tiempos fuertes encontramos alturas propias de los acordes mientras que en los débiles encontramos alturas que sirven de adorno, comúnmente se les conoce en música como ornamentos y no son propias del acorde. En un compás de 4/4, los tiempos más importantes son el primero y el tercero, que es semi fuerte, estos tiempos son la columna vertebral de la pieza, ya que en ellos se da prioridad a la armonía.

Al ser para piano, en la partitura de este preludio encontramos dos pentagramas, uno para la mano derecha y otro para la mano izquierda. Es común ver en este tipo de piezas que ambas manos están relacionadas con la armonía. Para realizar el análisis de este preludio, buscaremos en los dos pentagramas las respectivas alturas que permiten encontrar el acorde triada que pertenece a cada compás, se establecerá su ubicación en la respectiva octava y se le asignará su respectivo valor de disonancia.

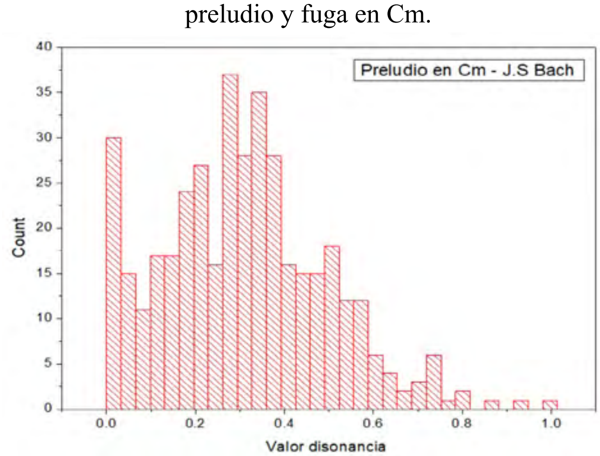
Figura 15. Acorde de fa menor en segunda inversión ubicado en la tercera octava del registro.



Fuente: Elaboración propia

Haciendo uso de los datos obtenidos en relación con el cálculo de disonancia de cada acorde en cada compás, podríamos establecer un criterio para entender el comportamiento de esta a partir de la distribución de probabilidad de los datos, los cuales se comportan como una distribución normal. Encontramos en este tipo de comportamiento un promedio del valor de disonancia de la pieza y los respectivos valores que orbitan este promedio. Su respectiva desviación estándar de 0,18675.

Figura 16. Histograma de disonancia obra de J. S. Bach preludio y fuga en Cm.



Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

- El análisis realizado mediante el método de ventanas, utilizando los 15 picos de frecuencia más altos por cada ventana, reveló para la obra de J. S. Bach un máximo de disonancia de 0,0121 y un mínimo de $8{,}5 \times 10{-}8$. También se observó un pico de disonancia máximo debido a la aparición del acorde de dominante en el segundo 42 del desarrollo de la pieza. El promedio de disonancia en la obra de J. S. Bach es de 0,0313563, lo que refleja los estrictos criterios compositivos del periodo barroco, que combinaron rigor técnico con una gran variedad de herramientas musicales. Este resultado muestra cómo Bach logró un control preciso de las disonancias para enriquecer su obra.
- Con el método de análisis de la respectiva partitura obtenemos resultados basados en la armonía y construcción de acordes, para ello se utilizaron los cálculos de disonancia de los acordes en todo el registro. Para la pieza de Bach se obtuvo un promedio de 3,2011 en valor de disonancia, en este modelo se usaron los 7 primeros armónicos de cada altura que compone el acorde para realizar la respectiva combinatoria entre estas y calcular el valor de disonancia por acorde. Una posible limitación de este modelo es el uso del decaimiento del espectro acústico del piano y el clavecín, y cómo estos están relacionados con la realidad. Los máximos de disonancia en la obra de J. S. Bach corresponden al compás 38 debido a la combinación de 4 acordes en este compás que obtienen un valor de 10,7734.
- Analizar una pieza musical directamente desde su partitura es fundamental, ya que al tener clara la selección de los acordes que intervienen en su estructura y su respectiva posición en el registro, se puede establecer valores de disonancia para cada uno de acuerdo con su aparición en cada compás, lo que proporciona una comprensión más profunda de cómo la disonancia contribuye a la dinámica y expresividad de la obra.
- Estos análisis tienen especificidades que hacen difícil su realización debido a que requieren tener en consideración diversos factores, como por ejemplo, su posición en el registro. La construcción de un modelo efectivo y preciso podría ser de gran utilidad en diferentes aspectos, como la comprensión en los efectos de consonancia en el momento del uso de recursos armónicos en composición o también el mejoramiento en cuanto a la calidad interpretativa del ejecutante de un instrumento.

Referencias

Ball, P. (2012). *El instinto musical: escuchar, pensar y vivir la música*. Turner.

Helmholtz, H. (1954). *On the Sensation of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music* [Trad.:A. J. Ellis]. Dover Publications.

Herrera, E. (1995). *Teoría musical y armonía moderna, vol. 2*. Antoni Bosch editor.

Miyara, F. (2005). *La música de las esferas: de Pitágoras a Xenakis... y más acá. Apuntes para el coloquio del Departamento de Matemática*. Scribd. https://es.scribd.com/doc/62711210/la-musica-de-las-esferas-de-pitagoras-a-xenakis-y-mas-aca

Plomp, R. y Levelt, W. J. M. (1965). Tonal consonance and critical bandwidth. *The Journal of the Acoustical Society of America*, *38*(4), 548-560.

Rossing, T. D., Moore, F. R. & Wheeler, P. (2013). *The Science of Sound*. Pearson New International Edition.

Roederer, J. G. (1997). *Acústica y psicoacústica de la música*. Ricordi Americana.

Sethares, W. A. (1993). Local consonance and the relation between timbre and scales. *The Journal of the Acoustical Society of America*, *94*(3), 1218-1228. doi:10.1121/1.408175

Sethares, W. A. (2005). *Tuning, timbre, spectrum, scale*. Springer Science Business Media.