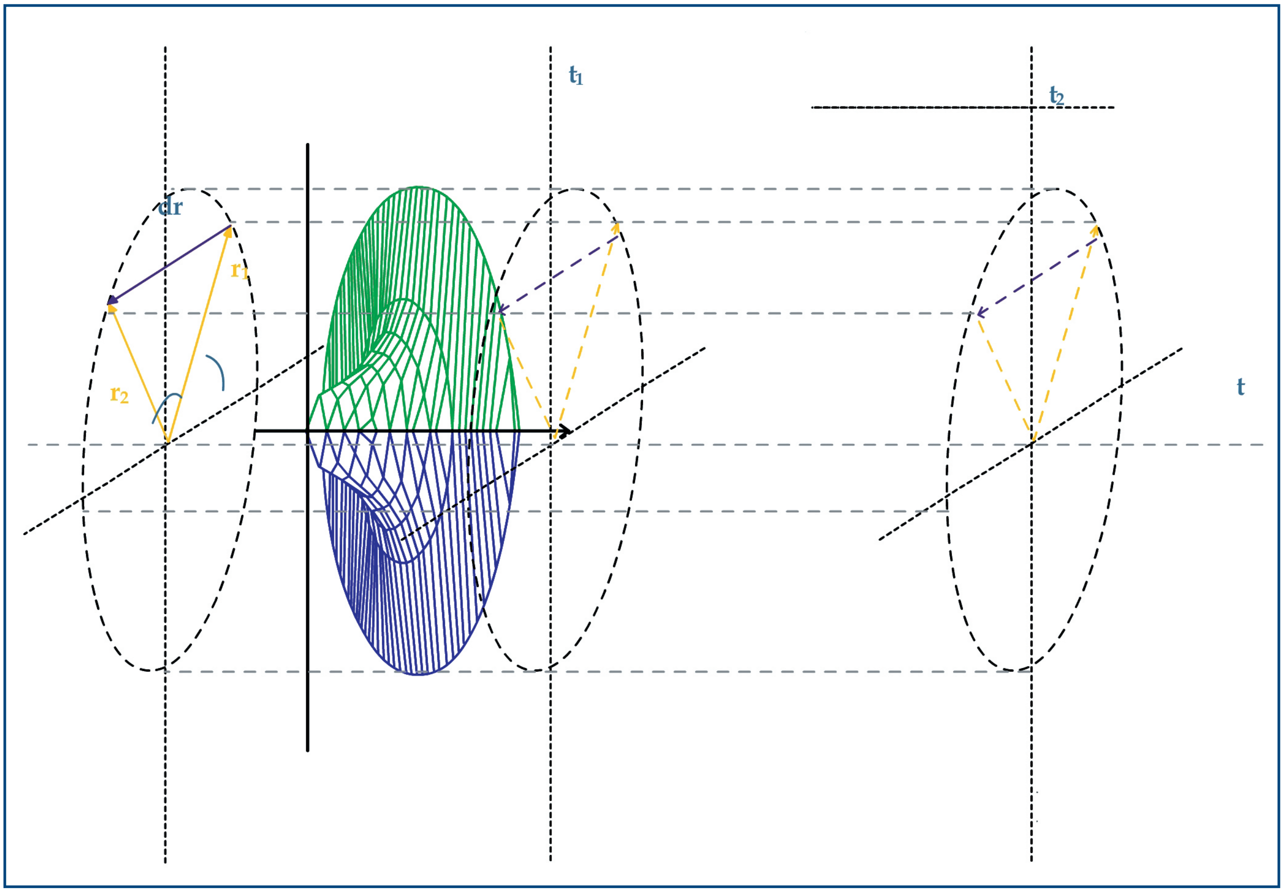
Pre•Impresos Estudiantes 9

Facultad de Ciencia y Tecnología Licenciatura en Física - 2016-I • ISSN: 2323-0193

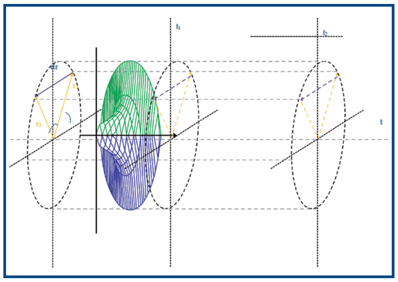


Introducción a la mecánica de Hamilton, un estudio de caso:

Anillo de masa *m* que se desliza sin fricción por un alambre de masa despreciable

Miguel Durán Rondón / Paula Andrea Almonacid Castiblanco

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores



Pre•Impresos Estudiantes 9

Adolfo León Atehortúa Cruz
Rector

Sandra Patricia Rodríguez Ávila
Vicerrectora de Gestión Universitaria

Piedad Ortega Valencia
Vicerrectora Académica

Luis Alberto Higuera Malaver
Vicerrector Administrativo y Financiero

Helberth Augusto Choachí González
Secretario General

Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Física

Rosa Inés Pedreros Martínez
Directora Departamento

Yecid Javier Cruz Bonilla
Coordinador Licenciatura en Física

María Mercedes Ayala Manrrique
John Eduard Barragán Parra
Supervisión de contenido

Juan Carlos Bustos Gómez
Director de la revista

Samuel Eduardo Sediles Martínez
Coordinador de la revista

Portada e Imágenes
Miguel Durán Rondón
Paula Andrea Almonacid Castiblanco

Artículos publicados en diferentes medios escritos y referenciados en cada uno de los textos.

ISSN: 2323-0193

Diseño y Preparación editorial
Universidad Pedagógica Nacional
Grupo Interno de Trabajo Editorial 2016

Alba Lucía Bernal Cerquera
Coordinadora Grupo Interno de Trabajo Editorial

Laura Rodríguez Mejía
Editora de Revistas

Impreso por Xpress
Estudio Gráfico y Digital S.A.
Bogotá, Colombia

Introducción a la mecánica de Hamilton, un estudio de caso:

Anillo de masa *m* que se desliza sin fricción por un alambre de masa despreciable

Presentación

La serie *Pre•Impresos Estudiantes* es una iniciativa editorial del Proyecto Comunicación y Publicaciones de la Facultad de Ciencia y Tecnología (FCT), cuya idea central es trabajar por la cualificación de la escritura, para dar visibilidad a la producción intelectual de los maestros en formación y en ejercicio. Con esta publicación se busca tender puentes entre los saberes especializados y la cultura en general, además de contribuir al fortalecimiento de la docencia y la investigación en educación.

Asimismo, constituye una estrategia de comunicación que posibilita la circulación adecuada de información y promueve la reflexión sobre temas y actividades inherentes a las ciencias, la matemática, la tecnología y su enseñanza. Con ella también se espera favorecer la integración de los equipos de trabajo y la construcción de relaciones de cooperación entre los diferentes miembros de la comunidad académica de la Facultad.

Estos aspectos, relacionados con los fines misionales de la Universidad Pedagógica Nacional, resultan pertinentes y significativos en la formación de nuevas generaciones de maestros e investigadores en pedagogía, que en su futura práctica profesional afrontarán diversos retos y circunstancias que el entorno social del país le plantea a la educación.

Información:

pre_impresos@pedagogica.edu.co
jcbustos@pedagogica.edu.co
Departamento de Física - UPN
Teléfonos: (57) (1) 3471190 / 5941894 Ext. 242

Introducción a la mecánica de Hamilton, un estudio de caso:

Anillo de masa *m* que se desliza sin fricción por un alambre de masa despreciable

Miguel Durán Rondón
dfi_mduran900@pedagogica.edu.co

Paula Andrea Almonacid Castiblanco
dfi_palmonacid256@pedagogica.edu.co

Resumen

Mientras que la mecánica clásica estudia los sistemas físicos como partículas o puntos matemáticos, hay otra forma de estudiar dichos sistemas desde una mirada de sistemas dinámicos, esto es, como un conjunto de partes que interactúan entre sí, este es el caso de la mecánica de Hamilton. Esta forma de ver los sistemas físicos ofrece muchas ventajas sobre la perspectiva clásica, porque permite hacer un análisis más completo del sistema por sus energías cinética y potencial, y en muchos casos, a pesar de que es un proceso detallado, puede ser una manera más sencilla de dar soluciones a los problemas que surgen en el contexto de los sistemas físicos.

Por eso, en este trabajo se explica de la forma más clara posible el método para solucionar un caso particular desde la mecánica de Hamilton, así como varias representaciones gráficas que pueden ser útiles para una mejor compresión del caso.

Palabras clave: mecánica, sistema, sistema dinámico, sistema físico, energía, ligadura, variable de configuración, vector unitario, momento generalizado, potencial, campo vectorial, espacio de fase

Abstract

While classical mechanics studies the physical systems as a particles or mathematical points, there is another way to study such systems under a dynamical systems perspective, that is, as a set of parts which interact between them, this is the case of the Hamilton's mechanics. This way of seeing the physical systems offers a lot of advantages over classical perspective, because it allows a more complete analysis of the system from its kinetic and potential energies and in many cases, even though it's a detailed process, it could be an easier way to provide solutions to the problems that arise in the context of physical systems.

That's why in this work is explained in the clearest possible way the method for solving a particular case from the Hamilton's mechanics, as well as several graphical representations that can be useful for a better understanding of the case.

key words: Mechanics, system, dynamical systems, physical systems, energy, ligature, configuration variable, unitary vector, generalized momentum, potential, vector field, phase space

Introducción

La mecánica es uno de los temas más estudiados en los cursos de física, ya que sirven a los fundamentos de muchas otras teorías. Una de las perspectivas más enseñadas de la mecánica es la *newtoniana*, o *mecánica clásica*, que trata los sistemas físicos como puntos matemáticos, de los cuales es suficiente conocer su velocidad y posición iniciales para predecir su comportamiento.

Sin embargo, hay otras maneras de estudiar los sistemas físicos, una de ellas es la perspectiva de sistemas dinámicos, es decir, ver todo integrado, como un conjunto de partes relacionadas entre sí; este es el caso de la mecánica de Hamilton, que se entiende como una reforma de la mecánica clásica, que desempeña un rol fundamental en la construcción de soluciones a las problemáticas que se plantean en el contexto de los sistemas físicos.

Al abordar la mecánica de Hamilton es necesario pensar en ese conjunto de partes que conforman el sistema para realizar su caracterización; pero también es pertinente identificar las condiciones que definen los cambios de estado del sistema y las condiciones en las cuales se dan estos cambios, es decir, hay que establecer las condiciones dinámicas.

El presente artículo pretende, mediante la solución de un caso particular, dar a conocer de una manera clara y precisa el procedimiento a seguir desde la perspectiva de la mecánica hamiltoniana, es decir, mediante los sistemas dinámicos.

Descripción del sistema

El siguiente sistema está conformado por un anillo de masa *m* que se desliza sin fricción por un alambre de masa despreciable, este sistema gira como se indica en la figura 1.

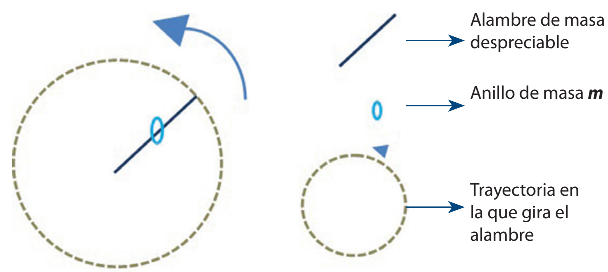


Figura 1. Partes que conforman el sistema y la dirección de su movimiento
Fuente: elaboración propia

Caracterización del sistema

Para caracterizar un sistema se procede, en primer lugar, a identificar sus partes móviles; para esto es fundamental diferenciar entre las partes que pueden ser consideradas componentes del sistema, aquellas que actúan como mecanismos de interacción entre sí, o las que son mecanismos de restricción del movimiento, las cuales se suponen con masa despreciable; de esta manera se logrará establecer cuáles son las componentes móviles del sistema para realizar su análisis dinámico. Para este caso, la parte móvil del sistema es el anillo de masa *m*[1].

En segundo lugar, el sistema también se compone de un marco de referencia desde el cual se va a realizar la observación, que para este caso será *la Tierra*. Luego, se deben establecer las restricciones a las que está sometido el movimiento del sistema; por consiguiente, es necesario determinar las ligaduras del sistema y, con ello, especificar los grados de libertad, para el caso que nos ocupa, el movimiento se

1 Nótese que el número de variables de configuración concuerdan con el número de grados de libertad del sistema.

restringirá al plano *x, y* y el límite de desplazamiento del anillo será la longitud *l* del alambre.

Los grados de libertad del sistema hacen referencia al número de movimientos independientes en los cuales se puede descomponer un movimiento arbitrario, o también al número de variables independientes con las que se puede especificar la configuración del sistema. Entonces, se habla de un *movimiento independiente* cuando se refiere al movimiento angular del alambre respecto al marco de referencia, y es *dependiente* cuando el anillo se desliza por el alambre, ya que, este movimiento depende estrictamente del desplazamiento del alambre (tabla 1).

Tabla 1. Síntesis de la caracterización del sistema

Partes móviles	***m***
Marco de referencia para movimiento y configuración	La Tierra
Restricciones o ligaduras	El movimiento se va a restringir al plano.
	El límite de desplazamiento del anillo es *l*.
Grados de libertad	*Movimientos independientes:* movimiento angular del alambre respecto al marco de referencia.
	Movimientos dependientes: desplazamiento de m respecto al alambre.

Fuente: Elaboración propia

Configuración del sistema

La configuración de un sistema es la posición de las partículas que lo componen en un instante de tiempo determinado, para describir el sistema es indispensable definir las variables, el movimiento de sus partículas y su posición. En este caso, las variables de configuración del sistema son (r, θ), ya que son suficientes para saber la posición de la partícula móvil del sistema si se requiere (figura 2), los posibles valores que puedan tomar estas variables representan los diferentes estados de configuración.

En cuanto al movimiento del sistema, este se restringe al plano, por lo que se puede realizar una representación gráfica que permite hacer un análisis vectorial del caso, como se observa en la figura 2, donde se ubica un plano cartesiano con origen en el centro de la trayectoria circular que describe el alambre, el cual sirve de referencia.

$\overrightarrow{r1}$ = radio vector que va desde el origen del plano y representa una posición inicial del anillo a lo largo del alambre.

$\overrightarrow{r2}$ = radio vector que va desde el origen del plano y representa una posición posterior del anillo a lo largo del alambre.

θ = describe el ángulo que se forma entre $\overrightarrow{r1}$ y la horizontal del plano cartesiano (eje x en sentido positivo).

$d\theta$ = Variación del ángulo θ en el tiempo.

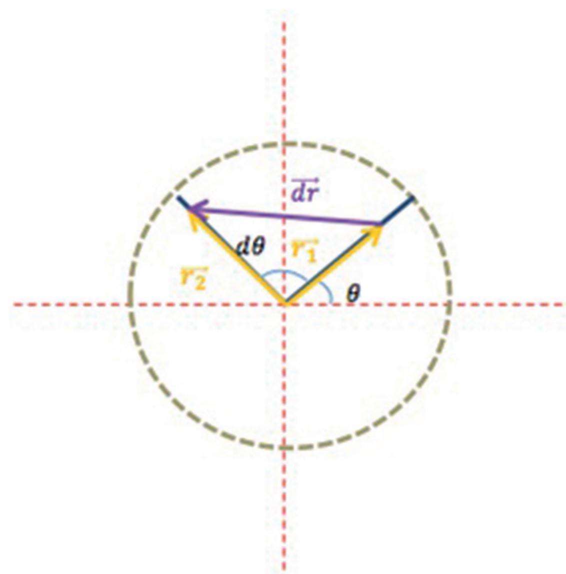


Figura 2. Diagrama de variables de configuración del sistema
Fuente: elaboración propia

Como se puede apreciar en la figura 2, hay un vector $\overrightarrow{dr}$ que representa el desplazamiento, tanto lineal (a lo largo del alambre), como angular del anillo en el tiempo, que es arrastrado por el alambre en su trayectoria circular. Como ya se mencionó, este vector posee dos componentes: uno lineal, al cual se le asocia la variable de configuración r y otro angular, al cual se le asocia la variable de configuración θ. Estos componentes se pueden expresar de la siguiente manera haciendo uso de la notación vectorial:

$$\overrightarrow{d_r}(\theta) = rd\theta\hat{\theta} \quad (1)$$

Esta es la componente angular del vector desplazamiento $\overrightarrow{dr}$, en la dirección en la que varía θ, representada por el vector unitario $\hat{\theta}$.

Ahora,

$$\overrightarrow{d_r}(r) = dr\hat{r} \quad (2)$$

Esta es la componente lineal del vector desplazamiento $\overrightarrow{dr}$, en la dirección en la que varía r, representada por el vector unitario $\hat{r}$.

Por tanto, el vector desplazamiento total es la suma de estas dos componentes, que queda expresado de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{dr} = rd\theta\hat{\theta} + dr\hat{r} \quad (3)$$

Estado de movimiento

Así como es necesario definir variables para poder hablar de la configuración de un sistema, también, es pertinente determinar las variables que caractericen el estado de movimiento. Estas variables dinámicas (en el caso de movimiento) se conocen con el nombre de *momentos generalizados* y representan los movimientos independientes del sistema.

La expresión matemática general para estos momentos generalizados de un sistema se puede enunciar como sigue:

$$P_j dq_j = \sum_i \vec{P_i}\overrightarrow{dr}_{ij} \quad (4)$$

Donde el subíndice *i* corresponde al número de variables de configuración del sistema y *j* corresponde al número de partículas móviles del sistema. Para este caso, *i* = 1; *j* = r, θ; por tanto, el número de momentos generalizados de un sistema también coincide con el número de grados de libertad del mismo.

En este caso, habrá un momento generalizado para la variable r y otro para la variable θ, los cuales se hallarán a continuación:

Con $j = r$ se tiene…

$$P_r dr = \vec{P}.\overrightarrow{d_r}(r) \quad (5)$$

En este punto hay que recordar la definición clásica de *momento*, ya que es la única variable en la ecuación (5) que aún no se ha definido, el *momento* viene dado por el producto de la masa y la velocidad de la partícula, así:

$$P = mv \quad (6)$$

Reemplazando la ecuación (6) en la ecuación (5), se tiene,

$$P_r dr = m\vec{v}.\overrightarrow{d_r}(r)$$

En general, la velocidad se puede expresar como la derivada de la posición con respecto al tiempo, por lo que la anterior ecuación tomaría la siguiente forma:

$$P_r dr = m\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}.\overrightarrow{d_r}(r) \quad (7)$$

Pero hay que recordar que la posición o desplazamiento es un vector que tiene dos componentes, como se pudo observar en el análisis vectorial hecho anteriormente; reemplazando la ecuación (3) en la ecuación (7) se obtiene:

$$P_r dr = m\left(r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + \frac{dr}{dt}\hat{r}\right).dr\hat{r} \qquad (8)$$

$$P_r dr = m\left(rdr\frac{d\theta}{dt}\cancelto{0}{\hat{\theta}.\hat{r}} + dr\frac{dr}{dt}\cancelto{1}{\hat{r}.\hat{r}}\right) \qquad (9)$$

Una vez se obtiene el producto que está indicado en la ecuación (7), el término del lado izquierdo en la suma se anula, ya que la multiplicación de dos vectores unitarios distintos es cero, por ser éstos ortogonales entre sí, en cambio el término de la parte derecha de la suma permanece, ya que la multiplicación de dos vectores unitarios iguales es igual a 1.

Dicho esto, la ecuación de *momento generalizado* para *r*, toma la siguiente forma:

$$P_r dr = mdr\frac{dr}{dt}$$

Al despejar P_r, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$P_r = m\frac{dr}{dt}$$

Para simplificar la ecuación, utilizamos la siguiente notación:

$$P_r = m\dot{r} \qquad (10)$$

Esta es la componente de *momento lineal* del anillo en dirección r.

Hasta aquí hemos hecho el análisis con $j = r$, ahora realizaremos el análisis con $j = \theta$, reescribiendo la ecuación (5) como sigue:

$$P_\theta d\theta = \vec{P}.\overrightarrow{d_r}(\theta) \qquad (11)$$

Reemplazando (6) en (11), la ecuación toma la siguiente forma y se realiza el procedimiento hecho para la variable *r*:

$$P_\theta d\theta = m\vec{v}.\overrightarrow{d_r}(\theta)$$

$$P_\theta d\theta = m\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}.\overrightarrow{d_r}(\theta)$$

$$P_\theta d\theta = m\left(r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + \frac{dr}{dt}\hat{r}\right).rd\theta\hat{\theta}$$

$$P_\theta d\theta = m\left(r^2 d\theta\frac{d\theta}{dt}\cancelto{1}{\hat{\theta}.\hat{\theta}} + rd\theta\frac{dr}{dt}\cancelto{0}{\hat{r}.\hat{\theta}}\right)$$

Debido a los productos punto entre vectores unitarios, en este caso solo permanece el primer término de la suma:

$$P_\theta d\theta = mr^2 d\theta\frac{d\theta}{dt}$$

Al despejar P_θ, la ecuación queda finalmente de la siguiente forma:

$$P_\theta = mr^2\frac{d\theta}{dt}$$

Para simplificar la ecuación, utilizamos la siguiente notación:

$$P_\theta = mr^2\dot{\theta} \qquad (12)$$

Esta es la componente de *momento angular* del anillo en dirección θ.

Energías

El concepto de *energía* ha evolucionado y es muy difícil definirla de forma general, sin embargo, en la mecánica de Hamilton se hace un análisis energético de los sistemas de partículas, para lo cual se abordan dos de las formas fundamentales de energía: *cinética* y *potencial*.

Energía cinética

La energía cinética es la medida del cambio que experimenta el sistema cuando varía su movimiento y depende de su velocidad. Matemáticamente se puede expresar de la siguiente manera:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\, v_i^2 \qquad (13)$$

Esta es la ecuación clásica de la energía cinética, pero como se está haciendo referencia a un sistema de partículas, se escribe como la sumatoria de las energías cinéticas de las partículas móviles del sistema.

En este caso, el número de partículas móviles es 1 (anillo de masa *m*), por tanto:

$$n = 1$$

Luego, la ecuación (13) toma la siguiente forma:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \qquad (14)$$

Se puede usar la definición del vector desplazamiento $\overrightarrow{dr}$, para hallar la velocidad, ya que, por lo general, se puede escribir la velocidad como la derivada de la posición respecto al tiempo; así, al derivar el vector $\overrightarrow{dr}$ respecto al tiempo, se obtiene:

$$\frac{dr}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} + \frac{dr}{dt}\hat{r}$$

Con esto, ya se tiene una expresión para la velocidad de la partícula, que es:

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\hat{r}$$

Dado que la velocidad es un vector, se debe hallar su magnitud para poder operarlo como un número. Recordemos que la magnitud o módulo de un vector es la multiplicación del vector por sí mismo, en este proceso permanecen los productos punto del vector, quedando finalmente así:

$$|v| = \left(\left(r\dot{\theta}\hat{\theta}\hat{\theta}\right) + \left(\dot{r}\hat{r}\hat{r}\right)\right) \qquad (15)$$

Ya que los productos cruz se anulan, porque el producto de dos vectores unitarios perpendiculares entre sí es igual a cero:

$$r\dot{\theta}\hat{\theta} \times \dot{r}\hat{r} = 0$$

Recordemos que el producto entre dos vectores unitarios iguales es igual a 1. Además, hay que tener en cuenta que en la ecuación (14) la velocidad está elevada al cuadrado y que por comodidad se había excluido del procedimiento.

Por último, elevamos la velocidad al cuadrado y la ecuación (15) queda expresada así:

$$v = \left[r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right] \qquad (16)$$

En este punto es importante señalar que en la magnitud del vector $\vec{v}$ están contenidos todos los posibles movimientos del sistema.

Teniendo la magnitud del vector velocidad se puede reemplazar la ecuación (16) en la ecuación que define la energía cinética (14) y operar. Obtenemos:

$$T = \frac{1}{2} m\left[r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\right]$$

Por tanto, la ecuación para la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}\left[mr^2\dot{\theta}^2 + m\dot{r}^2\right] \quad (17)$$

Pero como se mencionó en la configuración del sistema, existen unas variables que caracterizan el estado de movimiento del sistema llamadas *momentos generalizados*, así que es necesario expresar la energía cinética en términos de dichos momentos generalizados (10) y (12) que, recordemos, son los siguientes:

$$P_\theta = mr^2\dot{\theta}$$

$$P_r = m\dot{r}$$

De estas ecuaciones se despejan las variables $\dot{\theta}$ y $\dot{r}$, ya que, son las que se pueden reemplazar en la ecuación (17):

$$\frac{P_\theta}{mr^2} = \dot{\theta} \quad (18)$$

$$\frac{P_r}{m} = \dot{r} \quad (19)$$

Se reemplazan estas variables en la ecuación (17)

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(mr^2\left(\frac{P_\theta}{mr^2}\right)^2\right) + \left(m\left(\frac{P_r}{m}\right)^2\right)\right]$$

Haciendo las simplificaciones correspondientes en cada término de la suma, entonces:

$$T = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{{P_\theta}^2}{mr^2}\right) + \left(\frac{{P_r}^2}{m}\right)\right]$$

Por último, tomando *m* como factor común de los dos términos, se obtiene la siguiente ecuación para la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{{P_\theta}^2}{r^2}\right) + \left({P_r}^2\right)\right] \quad (20)$$

Energía Potencial

La energía potencial es la aptitud que tiene un cuerpo para realizar un trabajo en virtud de su posición o de su configuración y se expresa de la siguiente manera:

$$\Delta U = -\sum_i^n \int_1^2 \vec{F}_{neta} \cdot \overrightarrow{dr_i} \quad (21)$$

Está expresada por menos la sumatoria de las integrales de los trabajos realizados por las partículas que componen el sistema, multiplicadas por el diferencial de desplazamiento. En este caso, la sumatoria va desde $i = 1$ hasta 1, ya que solo se toma como partícula móvil el anillo de masa m y los límites de la integral serán desde una configuración 1 a una configuración 2.

Para saber cuál es esa fuerza que está en la integral, se puede tomar la definición general de fuerza ($F = m.\ a$), y con esta hacer un análisis de las fuerzas que interactúan de manera individual sobre el sistema, para así poder explicar los trabajos realizados por cada una de ellas.

Primero, se analiza la fuerza existente en el anillo, debido al movimiento angular del alambre, el anillo experimenta una aceleración, la cual corresponde a una aceleración centrípeta y puede escribirse como:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Reemplazando este término en la definición general de *fuerza* tenemos:

$$F = m\frac{v^2}{r} \quad (22)$$

Ya que la energía potencial es la capacidad de generar trabajo, se puede escribir dicha energía en términos de trabajo, reemplazando la ecuación (22) en la ecuación (21) se obtiene:

$$W_1 = \sum_{i=1}^{1} \int_1^2 m\frac{v^2}{r} . \overrightarrow{dr} \quad (23)$$

Ahora, se debe escribir de manera explícita el diferencial dr, el cual está descrito por la ecuación (3):

$$W_1 = \sum_{i=1}^{1} \int_1^2 m \frac{v^2}{r} \hat{r}.\left(r d_\theta \hat{\theta} + d_r \hat{r}\right)$$

Se puede sacar la variable *m* de la integral, ya que representa la masa del anillo, la cual es constante y se realiza la multiplicación indicada en la integral así:

$$W_1 = \sum_{i=1}^{1} m \int_1^2 \left(\frac{v^2}{r} r d_\theta \overbrace{(\cancel{\hat{r}}.\hat{\theta})}^{0}\right) + \left(\frac{v^2}{r} dr \overbrace{(\cancel{\hat{r}}.\hat{r})}^{1}\right)$$

Recordando la regla de producto punto entre vectores unitarios que se ha utilizado en los procedimientos anteriores, solo permanece el segundo término de la suma:

$$W_1 = m \int_1^2 \left(\frac{v^2}{r} dr\right)$$

Como vemos, dentro de la integral aparece una velocidad al cuadrado, aquí reemplazamos la ecuación (16) en la ecuación anterior:

$$W_1 = m \int_1^2 \left(\frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}{r}\right) dr$$

Recordando las ecuaciones (18) y (19), se escribe todo en términos de los momentos generalizados así:

$$W_1 = m \int_1^2 \left(\frac{{P_r}^2}{rm^2} + \frac{{P_\theta}^2 r^2}{m^2 r^5}\right) dr$$

Se puede sacar la variable m^2 de la integral, ya que es constante y se opera con la variable *m* que ya se encuentra afuera de la integral:

$$W_1 = \frac{1}{m} \int_1^2 \left(\frac{{P_r}^2}{r} + \frac{{P_\theta}^2}{r^3}\right) dr$$

Por propiedad de las integrales, se puede repartir la integral en los dos términos de la suma

$$W_1 = \frac{1}{m}\left(\int_1^2 \frac{{P_r}^2}{r} dr + \int_1^2 \frac{{P_\theta}^2}{r^3} dr\right)$$

Como los *momentos* también son constantes, se pueden sacar de cada una de las integrales y operar:

$$W_1 = \frac{1}{m}\left({P_r}^2 \int_1^2 \frac{1}{r} dr + {P_\theta}^2 \int_1^2 \frac{1}{r^5} dr\right)$$

Por último, solucionando las integrales, la ecuación para la energía potencial toma la forma:

$$W_1 = \frac{1}{m}\left({P_r}^2 \ln r - \frac{{P_\theta}^2}{4r^4}\right) \quad (24)$$

A continuación, se analizará el trabajo realizado por el peso del anillo.

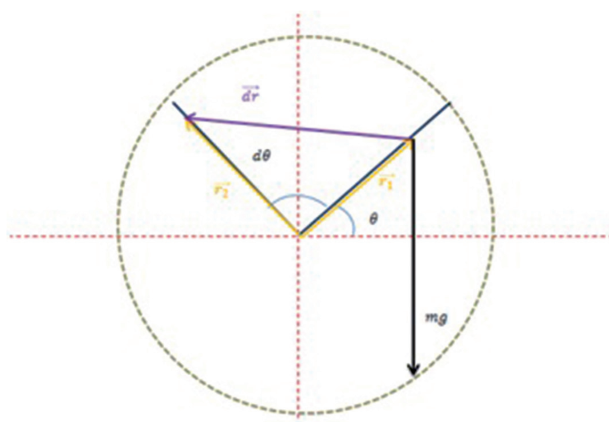


Figura3. Diagrama de variables de configuración del sistema

Fuente: elaboración propia

El trabajo realizado por el peso del anillo se puede escribir como:

$$W_2 = \int m\,\vec{g}.\overrightarrow{d_r}$$

Teniendo en cuenta que el movimiento es circular, el peso tendrá dos componentes en la mayoría de puntos de su trayectoria; además, el peso es un vector, el cual se puede descomponer fácilmente tomando el ángulo θ que se forma entre $\overrightarrow{r1}$ y la horizontal del plano (figura 3).

Descomponiendo esta fuerza (el peso) en sus dos componentes, y recordando la definición del vector $\overrightarrow{dr}$, podemos escribir:

$$\mathrm{W}_2 = \int [m\,g(\sin\theta)\hat{\theta} + mg(\cos\theta)\hat{r}]\left(rd_\theta\hat{\theta} + d_r\hat{r}\right)$$

Se puede sacar el peso como factor común de la integral:

$$\mathrm{W}_2 = mg\int\left[(\sin\theta)\hat{\theta} + (\cos\theta)\hat{r}\right]\left(rd_\theta\hat{\theta} + d_r\hat{r}\right)$$

Se realiza la multiplicación indicada en la integral, en este paso hay que tener en cuenta una vez más las propiedades de los vectores unitarios, que se han explicado en los procedimientos anteriores, por esto, al realizar las operaciones entre ellos permanecen los siguientes términos dentro de la integral:

$$\mathrm{W}_2 = mg\left[\int(\sin\theta)rd_\theta + \int(\cos\theta)d_r\right]$$

Quedando una integral sencilla de resolver; es evidente que su valor es cero, como se comprueba a continuación:

$$\mathrm{W}_2 = mg[-r(\cos\theta) + r(\cos\theta)]$$

$$\mathrm{W}_2 = 0$$

Por último, la energía potencial total del sistema se puede escribir como la suma de las dos energías halladas anteriormente:

$$\Delta U = -(W_1 + W_2)$$

Pero como el segundo término es igual a cero, la energía potencial del sistema queda definida por la ecuación (24), hallada anteriormente:

$$\Delta U = -\frac{1}{m}\left(P_r{}^2\ln r - \frac{P_\theta{}^2}{4r^4}\right)$$

El hamiltoniano del sistema

Recordando que la mecánica de Hamilton hace un análisis energético del sistema, su valor es obviamente la energía total de dicho sistema y está descrito por la suma de las energías potencial y cinética; por esto se hallaron en detalle anteriormente.

La expresión matemática que describe el hamiltoniano es:

$$H(\theta, r, P_\theta, P_r) = T + U \qquad (25)$$

Como se puede ver, el hamiltoniano está escrito en función de las variables de configuración que se definieron al inicio y es la suma de la energía cinética, representada por la letra *T* y la energía potencial, por la letra *U*; en este punto simplemente se reemplaza la ecuación (20) asociada a la energía potencial y la ecuación (24) asociada a la energía cinética en la ecuación (25)

$$H(\theta, r, P_\theta, P_r) = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{P_\theta{}^2}{r^2}\right) + \left(P_r{}^2\right)\right] - \frac{1}{m}\left(P_r{}^2\ln r - \frac{P_\theta{}^2}{4r^4}\right)$$

Por comodidad, se puede sacar $\left(\frac{1}{m}\right)$ como factor común de toda la suma:

$$H(\theta, r, P_\theta, P_r) = \frac{1}{m}\left[\frac{P_\theta{}^2}{2r^2} + \frac{P_r{}^2}{2} - P_r{}^2\ln r + \frac{P_\theta{}^2}{4r^4}\right]$$

Se suman los términos semejantes y resulta la siguiente expresión:

$$H(\theta, r, P_\theta, P_r) = \frac{1}{m}\left[P_\theta{}^2\left(\frac{2r^2+1}{4r^2}\right) + P_r{}^2\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right] \qquad (26)$$

Ecuaciones de Hamilton

Describen la evolución temporal del sistema y, para hallarlas, se procede a derivar parcialmente el hamiltoniano, descrito por la ecuación (26), con respecto a cada una de las variables de configuración.

Matemáticamente, estas ecuaciones se escriben en una matriz columna de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ P_r \\ P_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial r} \\ \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \frac{\partial H}{\partial P_r} \\ \frac{\partial H}{\partial P_\theta} \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Se procede a realizar las derivadas parciales de la columna derecha de la ecuación (27):

Derivada $\frac{\partial H}{\partial r}$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial r}\left(\frac{1}{m}\left[{P_\theta}^2\left(\frac{2r^2+1}{4r^2}\right) + {P_r}^2\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]\right)$$

Esta es una derivada sencilla, como se está derivando con respecto a *r*, el primer término de la suma se deriva como un cociente y el segundo como una resta:

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{m}\left[{P_\theta}^2\left(\frac{16r^3 - 16r^3 - 8r}{16r^4}\right) + {P_r}^2\left(-\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{m}\left[{P_\theta}^2\left(\frac{-8r}{16r^4}\right) - \frac{{P_r}^2}{r}\right]$$

Se simplifican los términos que se puedan simplificar y se saca el signo negativo de la ecuación por comodidad:

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{1}{m}\left[\frac{{P_\theta}^2}{2r^3} + \frac{{P_r}^2}{r}\right] \qquad (28)$$

Derivada $\frac{\partial H}{\partial \theta}$

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{m}\left[{P_\theta}^2\left(\frac{2r^2+1}{4r^2}\right) + {P_r}^2\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]\right)$$

Como la ecuación que describe el hamiltoniano no contiene la variable θ, la ecuación se toma como una constante, recordando que la derivada de una constante es cero, entonces:

$$\dot{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \qquad (29)$$

Derivada $\frac{\partial H}{\partial P_r}$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{\partial}{\partial P_r}\left(\frac{1}{m}\left[{P_\theta}^2\left(\frac{2r^2+1}{4r^2}\right) + {P_r}^2\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]\right)$$

Esta derivada también es muy sencilla, ya que el término P_r solo está en el segundo término de ecuación y se deriva como un producto:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = \frac{1}{m}\left[(2P_r)\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right] \qquad (30)$$

Derivada $\frac{\partial H}{\partial P_\theta}$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{\partial}{\partial P_\theta}\left(\frac{1}{m}\left[{P_\theta}^2\left(\frac{2r^2+1}{4r^2}\right) + {P_r}^2\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]\right)$$

Al igual que la derivada anterior, el término P_θ solo está en un término de la ecuación y se deriva como un producto:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{2P_\theta}{m}\left(\frac{2r^2+1}{4r^2}\right) \qquad (31)$$

Organizando en la matriz lineal (27) los términos correspondientes a cada una de las derivadas parciales halladas anteriormente, se obtiene la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \\ \dot{P}_r \\ \dot{P}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{m}\left[(2P_r)\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]\right) \\ \left(\frac{2P_\theta}{m}\left(\frac{2r^2+1}{4r^2}\right)\right) \\ \left(-\frac{1}{m}\left[\frac{{P_\theta}^2}{2r^3} + \frac{{P_r}^2}{r}\right]\right) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (32)$$

Potencial efectivo

El potencial efectivo es una manera de reformular la energía potencial de un sistema dinámico, de modo que hay una reducción en el número de dimensiones. Ya que la derivada parcial que nos dio cero fue $\dot{P}_\theta$, podemos decir que las constantes de este sistema dinámico son la masa del anillo *m* y P_θ. Para graficar el potencial efectivo, tomamos el primer factor de la ecuación (26) que describe el hamiltoniano

$$U_{efectivo} = \frac{{P_\theta}^2}{m}\left(\frac{2r^2+1}{4r^2}\right) \qquad (33)$$

Graficaremos estas potencias para distintos valores de P_θ, dándole un valor arbitrario a la masa del anillo, la cual será $m = 0{,}5\ kg$. Con estos valores se obtiene la siguiente figura:

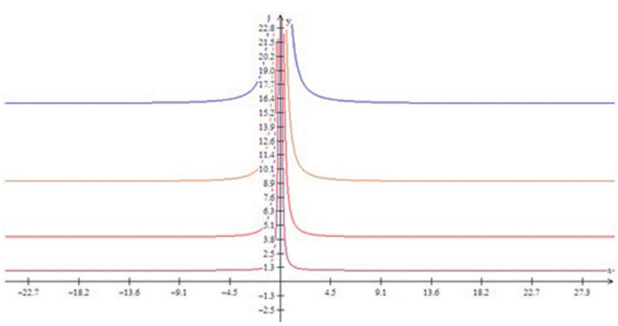


Figura 4. Potencial efectivo para distintos valores de $\mathbf{P_\theta}$ con una masa constante

Fuente: elaboración propia

Para hallar el máximo o mínimo de esta función, considerando $P_\theta = 1$ y $m = 0{,}5\ kg$, procedemos a reemplazar estos valores en la ecuación (33) y resolvemos por el método de la segunda derivada:

$$U_{efectivo} = \frac{1^2}{0{,}5}\left(\frac{2r^2+1}{4r^2}\right)$$

Derivando con respecto a *r*:

$$U_e' = 2\left(-\frac{1}{2r^3}\right)$$

Simplificando,

$$U_e' = -\frac{1}{r^3} \qquad (34)$$

Para que U'_e sea cero, r tendría que tomar valores muy grandes, por tanto, no hay un mínimo en la función y el máximo valor para r es la longitud del alambre.

Diagramas de fase y campos vectoriales

Como ya se mencionó, el estado mecánico del sistema está definido por los valores que tomen las variables de configuración y de movimiento en un momento dado; al decir que el sistema cambia de estado, implica que los valores de las variables que lo definen también cambian.

Al espacio definido por las variables de configuración y las variables del movimiento del sistema, lo denominaremos *espacio de fase del sistema*.

La evolución del sistema, por su parte, está representada por una curva del espacio de fase, el conjunto de curvas que representan la evolución del sistema se denomina *diagrama de fase*.

Para ver la evolución del sistema, se graficarán los resultados que se derivan de la conservación de la energía y de P_θ en el espacio de fase 4-dimensional definido por las variables $(\theta, r, P_\theta, P_r)$. Teniendo en cuenta que para nuestro sistema $P_\theta = 0$, el hamiltoniano del sistema queda de la forma:

$$H(\theta, r, P_\theta = 0, P_r) = \frac{1}{m}\left[P_r^{\,2}\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right] \qquad (35)$$

Como la energía se conserva, entonces la gráfica que representa la evolución del sistema debe estar contenida necesariamente en la hipersuperficie dada por $H(\theta, r, P_\theta, P_r)$ y en el plano definido por $P_\theta = 0$. Esto quiere decir que la proyección de la curva evolución del sistema sobre el espacio definido por $(\theta, r, P_\theta, P_r)$ estará sobre la gráfica contenida en el plano $P_\theta = 0$ o en el plano (r, P_r). Para poder graficar la curva de evolución del sistema despejamos P_r de la ecuación (35):

$$H = \frac{1}{m}\left[P_r^{\,2}\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]$$

$$mH = \left[P_r^{\,2}\left(\frac{1 - 2\ln r}{2}\right)\right]$$

$$\frac{2mH}{1 - 2\ln r} = P_r^{\,2}$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{2mH}{1 - 2\ln r}\right)} = P_r \qquad (36)$$

Nuevamente damos valor a la masa, *m*= 0,5 kg:

$$\pm\sqrt{\left(\frac{1}{1 - 2\ln r}\right)} = P_r \qquad (37)$$

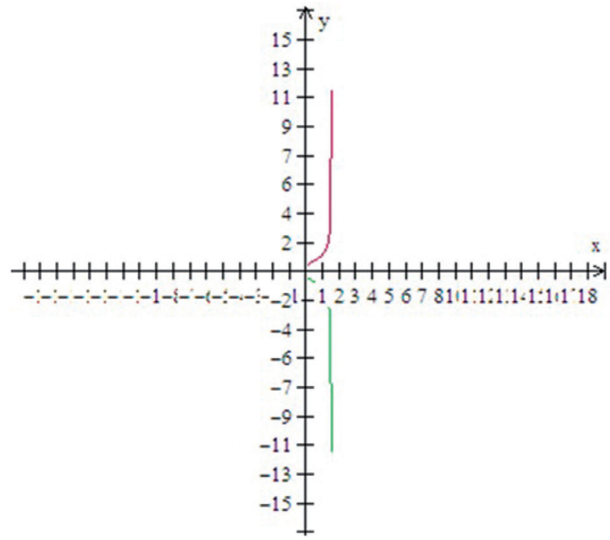


Figura 5. Curva de evolución del sistema para P_θ **= 0**

Fuente: elaboración propia

Si, por el contrario, $P_\theta \neq 0$, la curva de evolución del sistema estará sobre la misma hipersuperficie $H(\theta, r, P_\theta, P_r)$ pero su proyección estará sobre el espacio definido por (r, P_θ, P_r). Despejamos P_r del hamiltoniano (ecuación 26):

$$H = \frac{1}{m}\left[P_\theta^{\,2}\left(\frac{2r^2 + 1}{4r^2}\right) + P_r^{\,2}\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]$$

$$mH = \left[P_\theta^{\,2}\left(\frac{2r^2 + 1}{4r^2}\right) + P_r^{\,2}\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]$$

$$mH - P_\theta^{\,2}\left(\frac{2r^2 + 1}{4r^2}\right) = \left[P_r^{\,2}\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]$$

$$\frac{2}{1 - 2\ln r}\left[mH - P_\theta^{\,2}\left(\frac{2r^2 + 1}{4r^2}\right)\right] = P_r^{\,2}$$

$$\pm\sqrt{\frac{2}{1 - 2\ln r}\left[mH - P_\theta^{\,2}\left(\frac{2r^2 + 1}{4r^2}\right)\right]} = P_r$$

$$\pm\sqrt{\frac{2mH}{1 - 2\ln r} - P_\theta^{\,2} - \frac{P_\theta^{\,2}}{2r^2}} = P_r \qquad (38)$$

Nuevamente damos valor a la masa, $m = 0{,}5$ kg:

$$\pm\sqrt{\frac{1}{1-2\ln r} - P_\theta^{\,2} - \frac{P_\theta^{\,2}}{2r^2}} = P_r \quad (39)$$

Para graficar un campo vectorial en el espacio de fase, utilizamos las derivadas parciales expresadas en la ecuación (32). En principio, el espacio de fase para este problema presenta cuatro dimensiones: dos asociadas a la configuración y las otras dos al movimiento. Sin embargo, observamos que la derivada $\dot{P}_\theta = 0$, esto quiere decir que P_θ es una constante de movimiento. Por tanto, las ecuaciones de Hamilton se reescriben de la siguiente forma:

$$H(r,P_r) = \frac{1}{m}\left[P_\theta^{\,2}\left(\frac{2r^2+1}{4r^2}\right) + P_r^{\,2}\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]$$

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{P}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\left[(2P_r)\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right] \\ -\frac{1}{m}\left[\frac{P_\theta^{\,2}}{2r^3} + \frac{P_r^{\,2}}{r}\right] \end{pmatrix} \quad (40)$$

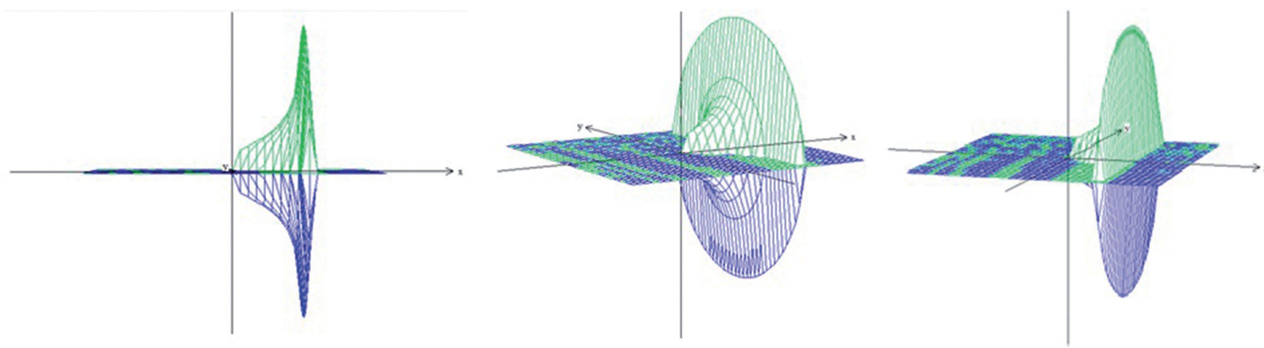


Figura 6. Curvas de evolución del sistema, desde diferentes ángulos de percepción, cuando P_θ es distinto de cero

Fuente: elaboración propia

Como podemos observar, se redujo de cuatro a dos el número de ecuaciones en la matriz, estas son ecuaciones diferenciales acopladas, las cuales se tendrán que resolver posteriormente. La representación de este sistema de ecuaciones en el espacio (r,P_r) surge de considerar estas ecuaciones en forma finita, esto es:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{1}{m}\left[(2P_r)\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right] \quad (41)$$

$$\dot{P}_r = \frac{dP_r}{dt} = -\frac{1}{m}\left[\frac{P_\theta^{\,2}}{2r^3} + \frac{P_r^{\,2}}{r}\right] \quad (42)$$

Estas ecuaciones informan cuál es el incremento de $(r,\ y\ P_r)$, estando ubicados en el estado mecánico de coordenadas (r,P_r) del espacio de fase. Por tanto, el siguiente estado estará dado por $(r + \Delta r,\ P_r + \Delta P_r)$ y así sucesivamente. De modo que para cada valor de r,P_r tenemos una línea dirigida o vectores que en conjunto representan un campo vectorial.

De nuevo, asignamos el valor $m=0{,}5$, para $P_\theta = 0$ y se reescriben las ecuaciones (41) y (42) así:

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{m}\left[(2P_r)\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]$$

$$\Delta r = \left(\frac{1}{m}\left[(2P_r)\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]\right)\Delta t$$

$$\Delta r = \left(\frac{1}{0.5}\left[(2P_r)\left(\frac{1}{2} - \ln r\right)\right]\right)\Delta t \quad (43)$$

Por otro lado,

$$\frac{\Delta P_r}{\Delta t} = -\frac{1}{m}\left[\frac{{P_\theta}^2}{2r^3} + \frac{{P_r}^2}{r}\right]$$

$$\Delta P_r = \left(-\frac{1}{m}\left[0 + \frac{{P_r}^2}{r}\right]\right)\Delta t$$

$$\Delta P_r = \left(-\frac{{P_r}^2}{0.5r}\right)\Delta t \qquad (44)$$

Esta es la representación de las ecuaciones de Hamilton en el espacio de fases; sin haberlas resuelto, son un campo vectorial hamiltoniano. Este campo queda representado de la siguiente manera:

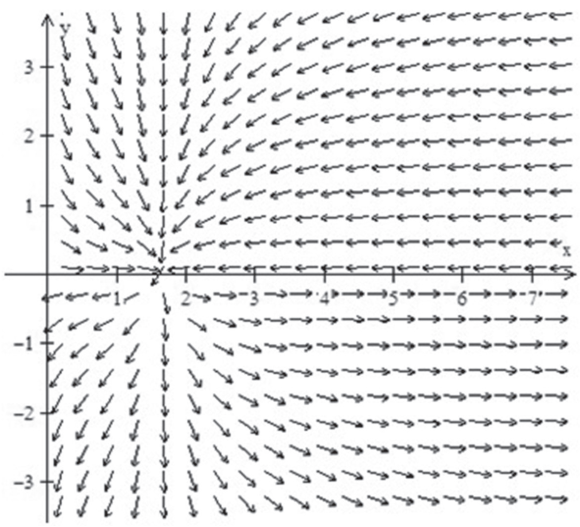


Figura 7. Campo vectorial conformado por r, P_r

Fuente: elaboración propia

El campo de pendientes que ilustra la figura 7 nos dice en qué dirección evolucionaría el sistema; esta estructura no es otra cosa que las soluciones a las ecuaciones diferenciales de nuestro problema.

Si se grafica la evolución temporal del sistema, podría decirse que la mejor hipersuperficie que representa esta situación correspondería a la conformada por un cilindro, como se ilustra en la figura 8.

Dentro de la hipersuperficie observada en la figura 8 están descritas todas las posibles trayectorias del anillo, ya que no hay una sola pues para un determinado θ se pueden dar todos los posibles r, siempre y cuando no se salgan de este espacio de configuración.

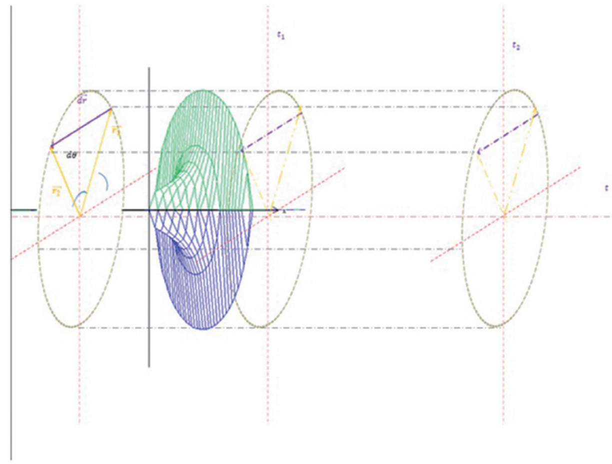


Figura 8. Hipersuperficie que representa el espacio de configuración del sistema

Fuente: elaboración propia

Conclusiones

De una u otra forma nos han enseñado que la mecánica, en física, estudia el movimiento de los cuerpos a partir de las fuerzas que actúan sobre ellos, asemejando el Universo a un gran mecanismo sometido a reglas que podemos conocer y mediante las cuales es posible predecir en mayor o menor medida cómo será el Universo en el futuro. Aunque la preocupación de la mecánica no es simplemente determinar la acción que ejercen las fuerzas sobre los cuerpos, o el origen de estas, se debe establecer, como propósito general, reglas comunes que cumplan todas esas fuerzas y, así, determinar cómo se moverán los objetos.

Podríamos decir que cuanto más detalladas y estructuradas sean las reglas que podemos establecer al movimiento de los cuerpos, mejor se podrá entender su comportamiento y evolución. En otras palabras, cuanto más riguroso sea el análisis matemático de un problema, mejor será su resultado. Entonces, la perspectiva de Hamilton, nombrada por muchos como *mecánica analítica*, trasciende la mecánica de Newton en el sentido en que propone solucionar los problemas mecánicos considerando magnitudes distintas y escalares como la energía cinética y el trabajo.

Por ello, al abordar el caso particular de la mecánica que presentamos en este artículo, la perspectiva de Hamilton nos permite desglosar el problema de una forma más rigurosa, de allí que resulte un procedimiento óptimo para la solución de situaciones de la mecánica. En primera instancia, porque nos exige identificar y diferenciar las partes móviles del sistema, haciendo la distinción entre componentes y ligaduras. Por otro lado, requiere que se establezca un marco de referencia del cual se parte para analizar el sistema. Y, por último, hay que observar qué movimientos pueden hacer las partes móviles ya establecidas, esto es, definir los grados de libertad del sistema.

Como se puede ver, la mecánica de Hamilton requiere de un trabajo más sensible al dividir y estudiar el problema desde su parte más pequeña. Pero así como la teoría de la Gestalt plantea que "el todo es más que la suma de las partes", se podría afirmar que desde la mecánica de Hamilton "el sistema es más que la suma de sus componentes", todas las partes de un sistema existen y adquieren un significado cuando se estudia su interacción, ellas no existen por sí solas, aisladas.

Para terminar, quisiéramos compartir los siguientes cuestionamientos y consideraciones que nos surgieron una vez intentamos darle solución a este problema particular:

- ¿Qué pasaría si consideramos la fricción en el sistema, es decir, si el alambre ejerciera una fuerza sobre el anillo que le impidiera deslizarse libremente?
- ¿Qué tratamiento habría que considerar si se tuviera en cuenta el movimiento rotacional del anillo sobre el alambre, es decir, si el eje de rotación del anillo fuese el alambre?

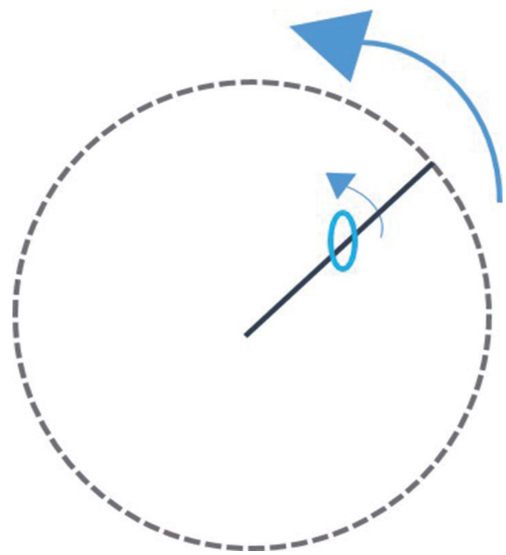


Figura 9. Anillo que se desliza sobre un alambre y al mismo tiempo gira sobre su propio eje

Fuente: elaboración propia

ACERCA DE LA SERIE PRE•IMPRESOS

La serie *Pre•Impresos Estudiantes* es un proyecto de la Facultad de Ciencia y Tecnología (FCT) de la Universidad Pedagógica Nacional que divulga a través de la comunicación escrita la producción intelectual de los autores, destacando sus experiencias y reflexiones respecto de los temas inherentes a sus campos disciplinares específicos y su enseñanza. Por tanto, configura un espacio de visibilidad y reconocimiento público del trabajo de los maestros en formación y en ejercicio adscritos a la FCT.

La escritura en el ámbito de las ciencias y la tecnología

La comunicación es un aspecto fundamental de los procesos de cognición que construye relaciones de fuerza e identificación entre las personas y define el lugar de cada individuo en un grupo. Así, toda relación social se funda en el intercambio de ideas, pues cuando hablamos y escribimos también damos forma al mundo. Por tanto, la conformación de comunidades académicas tiene un carácter social y comunicativo, proceso en el que la palabra escrita contribuye a la socialización de las ideas; dado que, la comunicación de la ciencia se realiza en lengua natural.

¿Qué es un impreso?

Los Pre-impresos son una publicación previa que se utiliza en las comunidades académicas para difundir el trabajo de sus miembros, contribuir a la formación de futuros investigadores y apoyar la cualificación de sus procesos escriturales.

Origen

Este proyecto editorial también constituye un espacio académico de formación y cualificación docente, que se inspiró en un trabajo similar que realiza el grupo *Física y Cultura* del Departamento Física de la FCT, con trabajos de profesores, desde principios de la década de 1990, con el fin de promover la circulación de las ideas de los profesores adscritos a este grupo de investigación.

Objetivos

Pre•Impresos Estudiantes promueve el fortalecimiento de la actividad académica en dos dimensiones; como **proceso de formación escritural** de los futuros maestros de ciencias, matemática y tecnología, y como **iniciativa editorial** que se traduce en una publicación seriada que divulga la producción intelectual de los estudiantes de la FCT.

El carácter del proceso realizado y el acompañamiento escritural que se brinda desde el proyecto hacen de esta experiencia una actividad académica de formación docente, con proyección en la práctica pedagógica e investigativa que contribuye a:

- Apoyar los fines misionales de la Universidad de investigar, producir y difundir conocimiento profesional docente, educativo, pedagógico y didáctico, además de propiciar una interacción con la sociedad para aportar a la construcción de nación.
- Propiciar una mayor consciencia lingüística, al poner de relieve la relación entre ciencia y lenguaje en el proceso de construcción textual, que requiere el desarrollo de la capacidad discursiva y habilidades comunicativas.
- Fortalecer la comunidad académica de la Facultad, al visibilizar las líneas de trabajo de los grupos de investigación de las diferentes unidades académicas.

Características

Pre•Impresos Estudiantes es un proyecto institucional de carácter extra curricular en el que pueden participar los estudiantes de los diferentes programas de la Facultad que quieran vincularse, ya sea, de manera individual o en grupo. El proceso de acompañamiento que se brinda exige compromiso y disciplina de los participantes, para la cualificación de su proceso escritural. Los temas a trabajar pueden cobijar una amplia gama de aspectos relacionados con las disciplinas —las ciencias, la matemática, la tecnología— y su enseñanza, así como, con la educación en general, ya sean reflexiones de carácter epistemológico o pedagógico, entre otras posibilidades.

Se puede participar con un amplio tipo de formatos de escritura, como por ejemplo: artículos, ponencias, módulos didácticos, cartillas, ensayos, crónicas, experiencias de aula, diarios, informes de investigación, por solo mencionar algunos. El proceso de elaboración, edición y publicación final de cada documento se ajusta al tiempo requerido por los autores para culminar esta labor. La publicación se hace en forma de cuadernillos monográficos en formato digital e impreso. La convocatoria es permanente.

Sobre los Autores

Paula Andrea Almonacid Castiblanco, estudiante de último semestre de la Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional, pertenece a la línea de investigación "El computador y las prácticas experimentales en la enseñanza de la física". En concordancia, se interesa en el desarrollo de objetos virtuales de aprendizaje como herramientas para facilitar los procesos de enseñanza/aprendizaje en este campo de la ciencia; además tiene un particular interés en la divulgación científica, participó en la novena versión del salón de la ciencia, un espacio de divulgación de la actividad experimental que se realiza en el Departamento de Física de la UPN. Cuenta con un nivel de inglés que le permite tener otro campo de interés: el estudio de fuentes de información como libros, artículos, páginas y documentos originales escritos en este idioma.

Miguel Durán Rondón, estudiante de último semestre de Licenciatura en Física de la Universidad Pedagógica Nacional, pertenece a la línea de investigación "El computador y las prácticas experimentales en la enseñanza de la física", de allí que entre sus intereses académicos estén la actividad experimental y el diseño o uso de *software* como aspectos claves en el proceso de enseñanza/aprendizaje de la física. En ese sentido, ha desarrollado su trabajo de grado diseñando una propuesta que articula los dos aspectos mencionados, con la intención de apoyar el proceso de comprensión de los estudiantes del curso de Física de Ondas. Con dicho trabajo participó en el noveno salón de la ciencia que se desarrolló el viernes 24 de abril de 2015 en la UPN, logrando el reconocimiento para que fuese seleccionado como uno de los expositores representantes de la institución en Expociencia Expotecnología Corferias 2015.