




Enriquecimiento de habilidades en el desarrollo de la competencia aditiva*

Enrichment of Skills in the Development of Additive Competence

Enriquecimento de competências no desenvolvimento de competência aditiva

Ana Cristina Santana-Espitia**  
Jesús Armando Fajardo-Santamaría*** 

Para citar este artículo

Santana-Espitia, A. C. y Fajardo-Santamaría, J. A. (2026). Enriquecimiento de habilidades en el desarrollo de la competencia aditiva, *Pedagogía y Saberes*, (64), 182-200. <https://doi.org/10.17227/pys.num64-22106>

Artículo de investigación

* Este trabajo es resultado de las investigaciones “Diseño y construcción de un instrumento para la observación de emociones epistémicas en el aula” (realizada por la primera autora entre 12/12//2023-31/01/2025) y “Emociones epistémicas en el aprendizaje de la adición y sustracción” (realizada por el segundo autor entre 26/03/2021-30/04/2022). Ambos proyectos recibieron financiación del Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación (MINCIENCIAS), mediante convocatorias de estancias posdoctorales 934-2023 (CTO112721-330-2023) y 891-2020 (CTO 80740-094–2021), respectivamente. Ambas estancias se llevaron a cabo en la Fundación Centro Internacional de Educación y Desarrollo Humano CINDE (Manizales-Colombia)

** Doctora en Psicología. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (sede Tunja), Tunja, Colombia. ana.santana@uptc.edu.co

*** Doctor en Filosofía. Fundación Centro Internacional de Educación y Desarrollo Humano (CINDE), Manizales, Colombia. thalmut.phd@gmail.com

Fecha de recepción: 30 de agosto de 2024
Fecha de aprobación: 21 de agosto de 2025
Fecha de publicación: 01 de enero de 2026

Resumen

La hipótesis del enriquecimiento de habilidades propone que el desarrollo de competencias exige una interacción fructífera entre las personas en situaciones cotidianas complejas. El avance del aprendizaje se explica por el ajuste de habilidades vinculadas a los aspectos de cada situación de aprendizaje. La idea es que la diversidad de objetos de aprendizaje e interacciones significativas posibilita la emergencia de desempeños estables, flexibles y variados. El objetivo de este estudio es indagar el desarrollo de la competencia aditiva según esta idea. Para ello, se aplicó una tarea de adición y sustracción con 10 problemas de estructura aditiva a 86 estudiantes de 1º a 5º de primaria de tres colegios de Manizales y Bogotá (Colombia), en un diseño cuasiexperimental orientado a comparar el desempeño de los niños en todos los grados de básica primaria. En ese sentido, se realizaron análisis de varianza (ANOVA) para identificar diferencias entre estos grupos, considerando el desempeño en situaciones aditivas formales o concretas y con estructuras semánticas diversas. Asimismo, se exploró el perfil de desempeño general y se realizaron correlaciones de Pearson entre aciertos y tiempo de respuesta. Los hallazgos de la investigación apoyan la hipótesis del enriquecimiento de habilidades en la consolidación de la competencia aditiva, con implicaciones pedagógicas relevantes.

Palabras clave

habilidad; competencia; estructura aditiva; sintonía metaestable; educación matemática

Abstract

The skills enrichment hypothesis proposes that the development of competencies requires a fruitful interaction between people in complex everyday situations. The learner's progress is explained by the adjustment of skills linked to the aspects of each learning situation. The idea is that the diversity of learning objects and meaningful interactions enables the emergence of stable, flexible and varied achievements. The goal of this study is to research the development of additive competence according to this idea. For this purpose, an addition and subtraction task with 10 problems of additive structure was applied to 86 students of 1st to 5th grade from 3 schools in Manizales and Bogota (Colombia) in a quasi-experimental to compare the performance of children in all grades of primary school. In this sense, analysis of variance (ANOVA) was carried out to identify differences between these groups, considering performance in formal or concrete additive situations and with different semantic structures. Likewise, the general performance profile was explored and Pearson's correlation was performed between correct answers and response time. The research findings support the hypothesis of skill enrichment in the consolidation of additive competence, with relevant pedagogical implications.

Keywords

ability; competence; additive structure; metastable attunement; mathematics education

Resumo

A hipótese do enriquecimento de habilidades propõe que o desenvolvimento de competências requer uma interação proveitosa entre as pessoas em situações cotidianas complexas. O progresso do aluno é explicado pelo ajuste das habilidades ligadas aos aspectos de cada situação de aprendizagem. A ideia é que a diversidade de objetos de aprendizagem e as interações significativas possibilitam o surgimento de desempenhos estáveis, flexíveis e variados. O objetivo deste estudo é investigar o desenvolvimento da competência aditiva de acordo com essa ideia. Para isso, uma tarefa de adição e subtração com 10 problemas de estrutura aditiva foi aplicada a 86 alunos do 1.º ao 5.º ano de três escolas de Manizales e Bogotá (Colômbia) em um projeto quase experimental com o objetivo de comparar o desempenho de crianças de todas as séries do ensino fundamental. Nesse sentido, foi realizada uma análise de variância (ANOVA) para identificar diferenças entre esses grupos, considerando o desempenho em situações aditivas formais ou concretas e com diferentes estruturas semânticas. O perfil geral de desempenho também foi explorado, e foi realizada a correlação de Pearson entre respostas corretas e tempo de resposta. Os resultados da pesquisa apoiam a hipótese de enriquecimento de habilidades na consolidação da competência aditiva, com implicações pedagógicas relevantes.

Palavras-chave

habilidade; competência; estrutura aditiva; ajuste metaestável; educação matemática

Introducción

Uno de los hitos críticos en el aprendizaje escolar es la consolidación de la competencia para sumar y restar (Peres y Vargas, 2021). La investigación reciente ha explorado la incidencia de diversos factores psicosociales en la trayectoria de aprendizaje de la matemática básica (Daro *et al.*, 2011; Evans y Field, 2020). Entre los aspectos destacados se incluyen las habilidades de razonamiento cuantitativo (Schalk *et al.*, 2016), la interacción con docentes (Valiente *et al.*, 2019), el aprovechamiento del material didáctico (Guntur *et al.*, 2023), la adaptación del individuo a alguna tradición o trasfondo sociocultural (Membrive, 2022), el uso de aproximaciones pedagógicas basadas en investigación y validadas empíricamente para la enseñanza temprana de las matemáticas (Clements *et al.*, 2023), así como la sintonía emocional del aprendiz en el entorno educativo (Bedoya *et al.*, 2022; Fajardo y Santana, 2019). En ese sentido, resulta imprescindible generar una perspectiva integradora que facilite la aproximación al desarrollo de esta competencia (Paliwal y Baroody, 2020; Schneider y Stern, 2009).

Comprender la trayectoria de desarrollo del saber escolar es uno de los objetivos centrales de la investigación educativa actual (Martínez *et al.*, 2015; Ministerio de Educación Nacional, 2022; Mutaqin *et al.*, 2021; Zhu, 2023). Este desafío implica dos demandas igualmente relevantes: por un lado, es imprescindible dilucidar los conceptos que se invocan para dar cuenta de la consolidación del aprendizaje, así, términos como *habilidad*, *competencia* o *experticia* tienden a usarse de manera difusa, especialmente al realizar atribuciones sobre el comportamiento de los aprendices; por otra parte, es preciso mostrar que la articulación de esa red de conceptos (*habilidad*, *competencia*, *experticia*), además de ser coherente, es lo suficientemente precisa para describir las variaciones en la actividad de los aprendices a lo largo de su trayectoria escolar.

El estudio del desarrollo de la competencia para adicionar y sustraer puede ser muy fructífero, porque la indagación acerca de la progresión de una competencia *básica* tiene la ventaja de que puede facilitar la comprensión de trayectorias más complejas (Clements y Sarama, 2014; Sinaga, 2024) y generar una aproximación con el potencial para el mejoramiento educativo en instancias decisivas de intervención pedagógica y social. Cuando los aprendices logran resolver situaciones que les exigen adicionar o sustraer, pueden enfrentar múltiples desafíos cotidianos dentro y fuera de la escuela (Baroody, 2024), lo cual contribuye sustancialmente a su adaptación psicosocial.

Para articular esa aproximación integradora del desarrollo de la competencia aditiva, es preciso enlazar esta investigación con un marco teórico amplio que sirva de trasfondo explicativo de los conceptos propuestos. Aunque, como notará el lector, el propósito de esta investigación es establecer la naturaleza de la competencia aditiva, se puede adelantar de manera plausible que la competencia aditiva es un conjunto interconectado de diversas habilidades cognitivas que le permiten a un agente resolver problemas de adición y sustracción. Esta postura se opone a visiones según las cuales hay solo un proceso subyacente que es supuestamente *esencial* para que un agente pueda sumar o restar.

En ese sentido, la difusión de las teorías del aprendizaje situado ha tenido un impacto profundo en la discusión sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje en el ámbito educativo (Gallagher, 2013; Jones, 2017; Páramo *et al.*, 2015; Sagástegui, 2004). Se trata de una auténtica revolución conceptual que contradice posturas muy arraigadas sobre el desarrollo del pensamiento, específicamente aquellas que tienden a ignorar la importancia de lo social en la estructuración del individuo (Heft, 2013). La interacción entre las personas en un mundo mutuamente compartido y socialmente estructurado se ha convertido en la unidad de análisis principal del aprendizaje (Heras-Escribano y de Pinedo-García, 2018), de modo que la adquisición de conocimiento se estudia como algo intrínsecamente situado en entornos enriquecidos socioculturalmente (Rietveld y Kiverstein, 2014).

A fin de abordar la indagación del desarrollo de la competencia aditiva, se presentarán a continuación algunas ideas centrales sobre el cambio conceptual desde el punto de vista de la cognición situada en el enfoque ecológico propuesto por Rietveld *et al.* (2018) y Rietveld (2022). Después, se discutirá brevemente el sentido de los conceptos relacionados con el desarrollo de habilidades, especialmente en la propuesta de Acosta-Silva y Vasco (2013). En tercer lugar, se delimitará la naturaleza y antecedentes de la investigación acerca de la competencia aditiva.

El Marco de Intencionalidad Hábil

Recientemente, Erik Rietveld ha propuesto un modelo teórico general (CAF, sigla en inglés de *Change-Ability Conceptual Framework*) para estudiar el cambio y consolidación del aprendizaje, enfocando el desarrollo de las habilidades de los individuos que interactúan entre sí y con el entorno (Rietveld, 2022). Este modelo supone, a su vez, un Marco de Intencionalidad Hábil (SIF, sigla en inglés de *Skilled Intentionality Framework*) que describe los elementos

a considerar en la dinámica intersubjetiva de constitución de agentes hábiles en relación con un ambiente socioculturalmente enriquecido (Rietveld *et al.*, 2018; Bruineberg *et al.*, 2021). En esta propuesta, las habilidades se entienden como patrones de actividad regular altamente flexibles propios de una *forma de vida*. Las habilidades de un individuo implican una relación directa con el entorno que habita, es por ello que como agente su conjunto de habilidades le permiten tratar con posibilidades de acción en el entorno (*affordances*). Se trata, pues, de una *sensibilidad* hábil en la que los individuos viven su experiencia cotidiana reconociendo oportunidades (*solicitations*, en inglés) que demandan el ejercicio de sus capacidades.

Debido a que la relación entre las habilidades de un agente y las configuraciones del entorno que posibilitan su ejercicio (*affordances*) es directa, la actuación implica una cierta capacidad para captar de forma inmediata la adecuación del despliegue comportamental. Se trata de una forma de normatividad situada (Rietveld, 2008), que permite ajustar en tiempo real el comportamiento para adecuarlo a las demandas presentes en el entorno.

Los seres humanos son formas de vida complejas, capaces de desplegar diversas habilidades de manera altamente flexible. El CAF permite una aproximación interesante a esa complejidad porque permite analizar el desarrollo de la habilidad como una cuestión ligada a la riqueza de las posibilidades de acción en el entorno. Esto es, la tendencia humana de crear y habitar conjuntos de *affordances* interconectados en nichos socioculturalmente complejos explica el desarrollo y estabilización de la amplia gama de habilidades que los seres humanos despliegan (Rietveld y Kiverstein, 2014).

Teniendo en cuenta lo anterior, abordar el desarrollo de competencias de acuerdo con el encuadre explicativo del CAF implica reconocer dos procesos simultáneos, a saber: a) un proceso de enriquecimiento en el que el agente *entra a participar* en una amplia gama de situaciones que incluyen diversos *affordances* que pueden ser reconocidos por quienes pertenecen a la tradición sociocultural del que aprende (Rietveld y Kiverstein, 2014), y b) una adaptación progresiva de las habilidades del individuo, ajustándose a los criterios de corrección implícitos y explícitos que regularán su actuación. De acuerdo con Bruineberg *et al.* (2021), esta adaptación puede entenderse mejor como el advenimiento de una cierta sintonía altamente flexible (metaestable), capaz de enfrentar variaciones situacionales frente a las demandas del entorno.

A manera de ejemplo, piénsese en las competencias que los videojugadores desarrollan para moverse e interactuar en ambientes virtuales. En primer lugar, el juego sitúa al jugador en un entorno complejo en el que puede ejecutar diversas acciones. Diversos juegos incluyen posibilidades distintas de movilidad en el entorno virtual; así, algunos conceden perspectivas globales que permiten observar y manipular todos los elementos presentes en el entorno, como en el caso de los RTS (*real time strategy*); otros simulan una perspectiva de primera persona y centran las posibilidades de interacción con objetos en el movimiento personal a lugares más o menos accesibles, como es el caso de los RPG (*role playing games*). En segundo lugar, las capacidades para moverse e interactuar con objetos dentro del entorno virtual del jugador se van afinando en su experiencia personal con el juego. Así, si se trata de un RTS, el videojugador poco a poco va refinando su capacidad para explotar recursos y distribuir objetos en el mapa para ajustar sus estrategias a largo plazo, los jugadores más competentes se distinguen precisamente por su alta coordinación al posicionar objetos. En los RPG, el desarrollo de las habilidades para moverse y explorar el entorno accediendo a lugares y objetos desconocidos es central; los mejores jugadores descubren elementos del juego (zonas, objetos, tesoros) que no son reconocidos por quienes tienen menores niveles de habilidad. Nótese que un buen jugador en RTS puede ser un jugador más bien mediocre en RPG y viceversa; no obstante, en cada caso, la sintonía que han desarrollado con la disposición del entorno del juego en cada género les permite adaptarse fácilmente a otros juegos del mismo género, de modo que su actividad es metaestable, esto es, altamente estable pero flexible a las variaciones de actividad.

Habilidad, competencia y experticia

El uso de los conceptos relacionados con la consolidación del aprendizaje implica el reconocimiento de una gama amplia de niveles de despliegue comportamental (Acosta-Silva y Vasco, 2013). Más aún, las atribuciones que asignan un cierto nivel de desarrollo tienden a ser imprecisas, difusas e incluso poco claras:

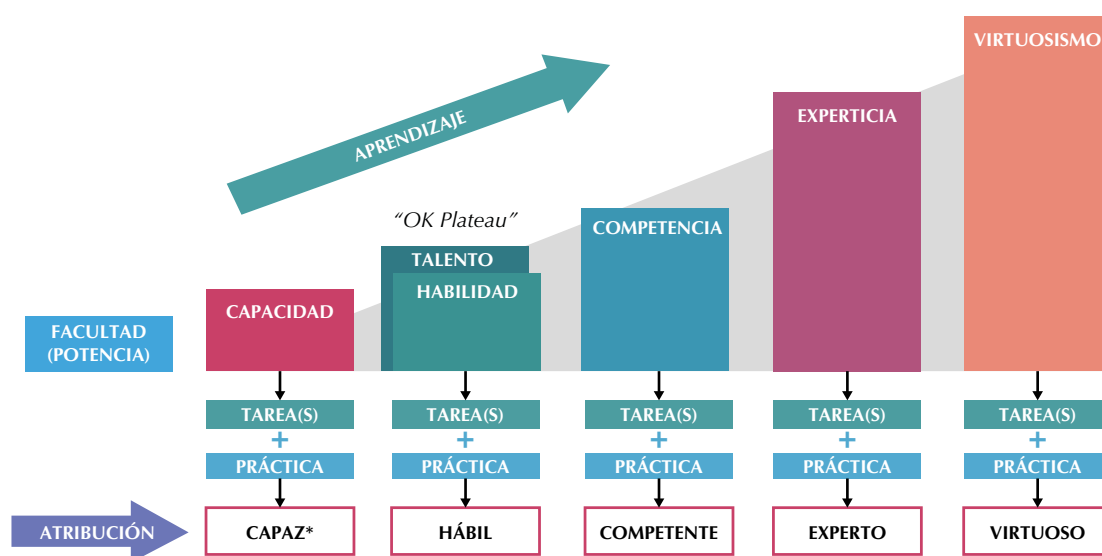
Imaginemos a una niña, Adriana, que a ojos de sus padres y profesores es muy especial, dado que tiene una sobresaliente *habilidad* musical. Desde muy pequeña fue claro que tenía un *talento* para la música, al demostrar una habilidad con la flauta que pocos habían visto; y un par de años más tarde, esa *aptitud* pasó a verse reflejada en la facilidad con la que tocaba el violín. Pero esta no es su única habilidad, ya que también tiene una *destreza* para

leer partituras y su *capacidad* de analizar la melodía de lo que escucha es algo que llena a sus padres de orgullo; finalmente, su *experticia* al silbar es una habilidad que nadie cambiaría. Por ello, al finalizar su último año escolar, su profesora la premió por su *competencia* musical, una habilidad que otros de sus compañeros no alcanzaron. (Acosta-Silva y Vasco, 2013, p. 23)

Como puede verse en la cita, lo que delimitan estos términos podría ser consistente con múltiples interpretaciones, ello no implica una dificultad

para la mutua comprensión en el habla cotidiana, pero supone un desafío mayor si de lo que se trata es de entender la consolidación del aprendizaje. Acosta-Silva y Vasco (2013) y Acosta-Silva (2022) proponen suplir esta dificultad atendiendo al nivel alcanzado por el individuo en un proceso largo de desarrollo (Figura 1). En ese sentido, algunos conceptos están más ligados al potencial del individuo en tanto que forma de vida, y otros, mucho más, a la ejecución de rutinas, despliegues y saberes en contextos educativos.

Figura 1.
Etapas del desarrollo de las competencias



Fuente: tomado de Acosta-Silva (2022, p. 50).

El nexos en el que se encuentran el CAF y la propuesta de trayectoria de desarrollo de facultades cognitivas de Acosta-Silva y Vasco (2013) y Acosta-Silva (2022) se halla en la noción de *habilidad*. De acuerdo con ambas aproximaciones, las habilidades se entienden mejor como disposiciones de actividad en situaciones específicas ligadas a ciertos entornos y objetos. Sobre ello, Rietveld (2022) señala:

Es el entorno vital compartido (el rico paisaje de posibilidades) en el que se encuentran tanto individuos como colectivos lo que genera estados (a menudo irreflexivos) de disposición a la acción relacionados con las posibilidades, basados en hábitos que se incorporan a los individuos y a las comunidades que forman. (p. 3)

Del mismo modo, Acosta-Silva y Vasco (2013) señalan:

Otro de nuestros resultados en ese apartado fue el ligar el desarrollo de las habilidades a las tareas. Lo primero que concluimos fue que no todas las tareas permiten llegar a desempeños diestros y mucho menos continuar el desarrollo hacia estadios mayores. Lo segundo fue que no existen habilidades generales, sino que cada habilidad se relaciona con tareas específicas dentro de un dominio de conocimiento bien delimitado. (p. 122)

De manera general, la idea es que hay una relación interna entre los entornos y objetos de aprendizaje y las habilidades que un aprendiz pone en juego en cada situación. Ahora bien, el ascenso que conduce al desarrollo de una *competencia* implica que el aprendiz logre *integrar* las variaciones posibles del entorno, enriqueciendo su disposición a actuar. En breve, se puede pensar que un individuo es competente cuando se le puede *atribuir un perfil de*

ejecución altamente estable, flexible y variado, siguiendo el argumento teórico de Rietveld, cuando entra en una “zona metaestable” o, en palabras de Acosta-Silva y Vasco (2013), cuando consigue “transferir su habilidad en contextos nuevos y retadores” (p. 123).

Ahora bien, puede notarse que la consideración de la trayectoria de aprendizaje es el criterio central que orienta la propuesta de Acosta-Silva y Vasco (2013) y Acosta-Silva (2022). La investigación contemporánea sobre las trayectorias educativas ha mostrado ser un enfoque fructífero para explorar el desarrollo de competencias (Sinaga, 2024). Los estudios muestran que el advenimiento de niveles avanzados de competencia tiene relación con la adquisición de destrezas, saberes y habilidades más básicas (Hämäläinen *et al.*, 2021; López, 2016; Vitello *et al.*, 2021). Más aún, en concordancia con el esquema de Acosta-Silva y Vasco (2013) y Acosta-Silva (2022), hay estudios que muestran que la acumulación amplia y diversa de *precurrentes* puede facilitar la emergencia de destrezas, saberes y habilidades de alto nivel (Escobar *et al.*, 2019; Núñez y Santamarina, 2014; Rodrigues *et al.*, 2021).

No obstante, la simple acumulación de habilidades, saberes o destrezas no parece ser suficiente para comprender el *avance* de los aprendices a lo largo de su ciclo de desarrollo. Más aún, como ya lo anticipan Acosta-Silva y Vasco (2013), una vez que se alcanza cierto nivel de desarrollo, la acumulación de experiencia que se asocia a una mayor exposición no conduce a “mejores desempeños” (p. 123).

Desde nuestro punto de vista, la estructura que Acosta-Silva y Vasco (2013) y Acosta-Silva (2022) proponen por niveles de consolidación es compatible con el marco conceptual general del CAF. A esa articulación la denominaremos *hipótesis del enriquecimiento de habilidades*, porque su eje central es que el avance que conduce a la competencia implica la emergencia de cierta metaestabilidad en el despliegue de habilidades. Hay cuatro indicios de ese proceso de enriquecimiento:

A. *Correspondencia entorno-individuo*: interpretar la trayectoria de desarrollo de competencias adoptando la hipótesis del enriquecimiento supone reconocer la relación interna que existe entre la configuración del ambiente y el despliegue de las habilidades individuales (Rietveld, 2008), por lo cual el avance debería relacionarse con el cambio en la adaptación a los objetos del entorno. Así, por ejemplo, una persona puede *agarrar* una taza por su asa porque esa asa es *agarrable*, pero esa habilidad se traduce en competencia, por ejemplo,

al agarrar un trofeo con asas, si es que hay *affordances* novedosos que pueden actualizar su habilidad motora.

- B. *Atribución como juicio normativo*: en el marco del CAF, la realización de actividades hábiles sucede en contextos sociales que *fijan* estándares normativos a las ejecuciones (normatividades formales) o en los que como mínimo se puede generar un consenso irreflexivo sobre lo que es adecuado (normatividades situadas) (Rietveld, 2008). Si se trata de un proceso de enriquecimiento el agente consolida sus capacidades *ajustando* su ejecución a las demandas normativas de su nicho sociocultural.
- C. *Plateau como sintonía metaestable*: las mesetas en la trayectoria de aprendizaje en el esquema de Acosta-Silva (2022) representan niveles de desarrollo en los que el individuo se adapta muy bien dentro de un cierto ámbito de problemas, situaciones, contextos, etc. Las cotas superiores suponen una adaptación al entorno a la vez más compleja y flexible, interpretándolas en términos del CAF, muestran el desarrollo de una “zona metaestable” (Bruineberg *et al.*, 2021, p. 12837) que acopia la trayectoria previa del individuo dentro de ese dominio. Debería hallarse alguna tendencia que muestre la consolidación de sintonías (de habilidades vinculadas a la competencia) en una “zona metaestable” superior.
- D. *Oportunidades e interacción*: la explicación de la consolidación del aprendizaje que deriva del CAF es interactiva. Las sintonías metaestables emergen en la interacción con el entorno y con otras personas. En ese sentido, la evidencia debería mostrar el ajuste del individuo a requerimientos intrínsecos de los objetos de aprendizaje y a las demandas de otras personas que interactúan con el aprendiz.

La compatibilidad entre el marco para el cambio conceptual centrado en habilidad (CAF) y la propuesta de análisis del desarrollo de la competencia de acuerdo con la trayectoria del agente de Acosta-Silva y Vasco (2013) y Acosta-Silva (2022) puede ser indagada a profundidad enfocando el lente en un dominio específico de aprendizaje. En el contexto de una exploración más amplia sobre el aprendizaje de la adición y la sustracción, nuestro punto de vista es que los cuatro aspectos de la compatibilidad CAF-trayectoria educativa pueden evidenciarse en este dominio. El objetivo de este estudio es indagar el proceso de desarrollo de la competencia aditiva de acuerdo con esta propuesta.

El aprendizaje de la adición y la sustracción

Diversas voces han señalado el aprendizaje de la adición y la sustracción como uno de los hitos centrales de la educación básica (Anderson *et al.*, 2022; Pérez y Vera, 2012). Hay quienes lo caracterizan como *precurrente*, porque se trata de una habilidad que se requiere para adquirir otras habilidades (Fritz *et al.*, 2013; Santana *et al.*, 2018).

De acuerdo con los estándares en educación matemática para básica primaria en Colombia, la competencia para realizar operaciones de suma y resta debe consolidarse antes del grado 5.^o (Gómez *et al.*, 2016; Ministerio de Educación Nacional, 2006, 2016). Los maestros de primaria enfatizan una parte importante de sus esfuerzos en la generación de oportunidades para este aprendizaje. En la cultura colombiana hay dos maneras de promover la competencia aditiva: por un lado, los docentes guían la resolución de problemas bien definidos que suelen estar centrados en la operación con cantidades abstractas (Bonilla *et al.*, 1999; González *et al.*, 2022); por otra parte, los aprendices son introducidos y participan en situaciones en las que deben interpretar información sobre cantidades para adicionar o sustraer, incluso desde antes de su inmersión en la educación formal (Aroca *et al.*, 2024; Vasco, 1990). En breve, en términos del sistema ecológico-social de la interacción en situaciones aditivas (Santana *et al.*, 2018), es posible distinguir entre problemas formalizados, en los que la interpretación se apoya en las experiencias dentro de la escuela, y problemas concretos, cuya comprensión supone para el aprendiz el ejercicio de *situarse* en un contexto interactivo con ciertos objetos y personas.

Desde un punto de vista formal, la adición y la sustracción se estudian a partir de una estructura común —la *estructura aditiva*—, que puede definirse como aquella estructura o relación formada por adiciones y sustracciones (Castro *et al.*, 1995; Gilmore y Spelke, 2008; Schneider y Stern, 2009; Vergnaud, 1991), esto es, la sustracción puede entenderse como “una suma donde se ignora uno de los sumandos” (Maza, 2001, p. 3). Así, los problemas de estructura aditiva son aquellos que se resuelven con una operación de suma o resta (Castro *et al.*, 1995). No obstante, más allá de la estructura formal, la resolución de una tarea de adición o sustracción implica la comprensión del significado de diversas situaciones en las que es necesario resolver este tipo de problemas.

Los problemas de adición y sustracción pueden presentarse con diferentes formas cuyo significado implica diversas posibilidades con las que el aprendiz puede estar más o menos familiarizado. De acuerdo

con autores como Carpenter *et al.* (1981), los problemas aditivos tienen cuatro estructuras semánticas, a saber:

- A. *Cambio*: una cantidad modifica a otra para obtener un resultado, por ejemplo; si Miguel tiene 3 dulces y su hermana le da 2 dulces más, ¿cuántos dulces tiene ahora?
- B. *Combinación*: cantidades que denotan el valor cardinal de dos o más conjuntos diferentes se integran para obtener un resultado, por ejemplo, Sofía coloca encima de su cama 5 muñecas, 1 pelota y 4 peluches. ¿Cuántos juguetes tiene en su cama?
- C. *Comparación*: se evalúa la relación entre dos cantidades para obtener un resultado; por ejemplo: Francisco tiene 18 años y Teresa tiene 31 años. ¿Cuántos años de más tiene Teresa?
- D. *Igualación*: exigen simultáneamente relacionar cantidades y modificar una o más de ellas para que coincida con un criterio definido; por ejemplo: si Luis tiene 500 pesos y Marcela tiene 1300 pesos, ¿Cuánto dinero le falta a Luis para tener la misma cantidad que Marcela?

Adicionalmente, dentro de una misma estructura semántica pueden existir variaciones sintácticas (Daroczy *et al.*, 2015). Por ejemplo, los problemas de cambio pueden ser anterógrados o retrógrados. Así pues, las mismas cantidades (por poner un caso, 2, 3 y 5) pueden hacer parte de problemas aditivos de cambio con estructuras semánticas y sintácticas muy diferentes (¿Cuánto hay que agregarle a 2 para que sea 5? o bien ¿Cuánto hay que quitarle a 5 para que sea 2?).

Esta amplia variabilidad semántica y sintáctica implica que los aprendices pueden tener diversas trayectorias de aprendizaje en su consolidación de la competencia aditiva (Ramírez y Castro, 2016). Más aún, la trayectoria de aprendizaje de la adición y la sustracción *puede revelar* la correspondencia entre las posibilidades en el entorno (*affordances*) —en este caso, cada tipo de problema— y la habilidad individual. En breve, de acuerdo con el CAF, el desarrollo de la competencia aditiva debe mostrar trayectorias diferenciables según las diversas estructuras semánticas y sintácticas de la adición-sustracción.

Por otra parte, para acreditar el enfoque centrado en la trayectoria educativa, en la consolidación del aprendizaje de la adición y la sustracción debería hallarse evidencia de que el individuo consolida habilidades, esto es, que los aprendices de cierto nivel *logran sintonizarse* para resolver cierto tipo de

problemas. En breve, el acierto o desacierto diferencial en problemas aditivos a lo largo de una trayectoria educativa puede evidenciar la coherencia del CAF en sus aspectos de interactividad, normatividad y metaestabilidad. De manera recíproca, la adaptación hábil de los aprendices de acuerdo con múltiples tipos de problema (formal vs. concreto; o bien, cambio vs. combinación vs. comparación vs. igualación) puede aclarar la trayectoria de aprendizaje como un proceso orientado al enriquecimiento de habilidades en el que el agente logra nuevas adaptaciones al tratar con nuevos objetos de aprendizaje (problemas con estructuras semánticas y sintácticas diferentes) y las integra de manera que logra una sintonía que es metaestable (sensible a las variaciones).

El tiempo de resolución de las tareas es un dato crucial para este último asunto, puesto que si la trayectoria es un proceso de enriquecimiento que alcanza cierta sintonía metaestable las respuestas deberían agilizarse progresivamente. Nótese que esta predicción es la opuesta a lo que se esperaría de una explicación de la consolidación de la competencia aditiva *multiestable*, esto es, si se concibiera el proceso de desarrollo de competencias como simple acumulación de nuevas habilidades, cada ruta de habilidad para cada tipo de problema sumaría su propio tiempo de forma independiente al tiempo total de resolución y en esa medida no deberían esperarse mejoras en el tiempo de ejecución en los estadios superiores del desarrollo de la competencia.

Método

La investigación contemporánea de las trayectorias educativas ha privilegiado dos formas de abordaje: el seguimiento longitudinal o la comparación transversal de grupos de diferentes cohortes (grupos psicosociales) (López y Rodríguez, 2020). Para el caso del aprendizaje de la competencia aditiva, la comparación de cohortes en diferentes niveles educativos presenta dos ventajas evidentes: por un lado, hace posible asociar el perfil de ejecución de los aprendices con circunstancias educativas y psicosociales comunes, y, por otra parte, facilita el análisis que promueva iniciativas para el mejoramiento educativo dentro de cada cohorte. En ese sentido, el cuasiexperimento permitió aplicar la misma tarea a niños de grados diferentes para comparar sus desempeños y establecer tendencias que permitan relacionar las cohortes en un perfil integrado de la trayectoria educativa.

Diseño y participantes

Se realizó un diseño cuasiexperimental que comparó el desempeño de los aprendices de básica primaria de las cohortes de los grados 1º a 5º. Se aplicó una tarea que incluyó 10 problemas de adición y sustracción a una muestra por cuotas de 86 estudiantes de tres colegios ubicados en Bogotá y Manizales (Colombia). Para la selección de los participantes se buscó garantizar al máximo la equidad con respecto a género (44 niños - 42 niñas) y grado (1º = 17 estudiantes, 2º = 12 estudiantes, 3º = 22 estudiantes, 4º = 17 estudiantes y 5º = 18 estudiantes). Los aspectos éticos de este estudio fueron avalados por el CINDE (Fundación Centro Internacional de Educación y Desarrollo Humano) (Anexos 1 y 2), y todas las actividades fueron realizadas con el consentimiento de los tutores legales de los niños y previa recolección escrita y verbal de su asentimiento para participar en el estudio.

Procedimiento e instrumento

Los estudiantes fueron entrevistados de manera *online* a través de la plataforma Teams. Durante la resolución de la tarea, además del examinador, estuvo presente el acudiente del estudiante (padre, madre o cuidador) y otra niña que interactuó con el participante resolviendo otros problemas de adición y sustracción. La niña no participante realizó algunas preguntas adicionales sobre aspectos afectivos, opiniones y creencias que no se reportarán en este texto y que serán objeto de indagación adicional; la idea fue que la interacción entre los niños, el examinador y el acudiente fuera tan habitual como una sesión de clase en línea. La mitad de los problemas aditivos exhibía información abstracta sobre cantidades (formales) y la otra mitad presentaba situaciones cotidianas en las que debía realizarse alguna adición o sustracción (concretos). Se incluyeron las cuatro estructuras semánticas, así como variaciones sintácticas en cambio y comparación; estos problemas ya habían sido probados en un estudio previo llevado a cabo con estudiantes de 2.º y 3.º (Santana, 2019), y se seleccionaron por su perfil de discriminación y dificultad de acuerdo con ese estudio. De manera global, la confiabilidad obtenida para los reactivos usados en esta experiencia es alta ($\alpha = .771$, IC $\alpha = .742 - .802$), a pesar de ser una tarea de solo 10 problemas. La Tabla 1 presenta la estructura semántica y sintáctica de los problemas utilizados en la experiencia.

Tabla 1.
Problemas de adición y sustracción usados en la experiencia

Número del ítem en el instrumento original	Nombre ítem	Ítem	Estructura aditiva
2	Dedos Combinación	Paola muestra 6 dedos y Pablo muestra 8 dedos. ¿Cuántos dedos tienen entre los dos?	CO1 (Combinación 1) $a + b = ?$
4	Dedos Cambio retrógrado	Si coloco 9 dedos y guardo 6 dedos. ¿Cuántos dedos quedan?	CA2 (Cambio-separación) $a - b = ?$
12	Monedas Combinación	Tú tienes 300 pesos y yo tengo 400 pesos. Si reunimos nuestras monedas, ¿Cuánto dinero tenemos entre los dos?	CO1 (Combinación 1) $a + b = ?$
13	Monedas Comparación	María tiene 400 pesos, y Pilar tiene 500 pesos más que María. ¿Cuánto dinero tiene Pilar?	CMP3 (Comparación 3) $a + b = ?$
19	Buses Igualación	Si en el bus de Carlos hay 13 pasajeros y el bus de Felipe tiene 8 pasajeros ¿Cuántos pasajeros deben subirse al bus de Felipe para que el bus tenga el mismo número de pasajeros que el bus de Carlos?	IG1 (Igualación 1) $c - a = ?$
21	Cuentas Cambio	Si Luisa tiene 7 objetos y 4 objetos. ¿Cuántos objetos tiene Luisa?	CA1 (cambio-uniión) $a + b = ?$
23	Cuentas Comparación	Juan tiene 9 objetos y Diego tiene 6 objetos más que Juan. ¿Cuántos objetos tiene Diego?	CMP3 (Comparación 3) $a + b = ?$
25	Rectas Cambio	Si estoy en el lugar 7 y quiero ir al lugar 16 ¿Cuántos lugares debo avanzar?	CA3 (Cambio-uniión) $c - a = ?$
27	Rectas Combinación	Si voy del 0 al lugar 13 en dos recorridos, y en el primero llegué hasta el lugar 6. ¿Cuántos lugares debo avanzar en el segundo recorrido?	CO2 (Combinación 2) $c - a = ?$
30	Naturales Igualación	18 es más grande que 6. ¿Cuánto debo quitarle a 18 para que sea igual a 6?	IG2 (Igualación 2) $c - a = ?$

Fuente: elaboración propia.

Variables

Se registró el acierto de los aprendices de las diferentes cohortes en los 10 problemas de la tarea. Igualmente, se obtuvo el puntaje global de aciertos de cada participante y los puntajes parciales obtenidos por el participante de acuerdo con cada estructura semántica y tipo de contenido (concreto o formal) de los ítems resueltos durante la tarea. Asimismo, se registró el tiempo de reacción de cada aprendiz para cada ítem y se recogió información acerca de indicadores sociodemográficos.

Plan de análisis

Acorde con los cuatro indicios de la hipótesis del enriquecimiento de habilidades mencionados anteriormente, se analizaron cuatro tipos de información, a saber: a) las diferencias en el desempeño frente a diversas estructuras semánticas a lo largo de la trayectoria examinada en las respuestas de las diferentes cohortes; para ello se empleó análisis de varianza (ANOVA); b) las diferencias en el desempeño en problemas formales (con normatividades formales para estudiantes escolarizados) y concretos (con

normatividades situadas abiertas a interpretación para esos aprendices), lo cual exige ANOVA, así como el perfil de desempeño en cada variedad de problemas para establecer si la variación se estabiliza a lo largo del proceso de enriquecimiento; c) el perfil de desempeño general, mediante la visualización de un gráfico exploratorio conjunto de acierto por grados según estructuras semánticas y sintácticas; y d) las relaciones entre acierto y tiempo de respuesta a lo largo del ciclo de desarrollo, mediante el análisis de correlación de Pearson. Para la ejecución de los análisis se emplearon Excel 2019, JASP 0.17.2.1 y SPSS 27.

Resultados

Desempeño diferencial por curso en estructuras semánticas y sintácticas

Los análisis de varianza (ANOVA) revelan diferencias significativas entre grados escolares en problemas de cambio ($F(4, 81) = 4.884, p = .001, \eta^2 = .194$) y de igualación ($F(4, 81) = 6.962, p = .001, \eta^2 = .256$).

En los problemas de cambio, los análisis *post hoc* muestran que los aprendices de 1.º tienen menor promedio de acierto que los aprendices de 3.º (Diferencia de medias: $-.607, p_{\text{tukey}} = .008, IC\ 95\ \% [-1.10, -.12]$), de 4.º (Diferencia de medias: $-.765, p_{\text{tukey}} < .001, IC\ 95\ \% [-1.29, -.24]$) y 5.º (Diferencia de medias: $-.582, p_{\text{tukey}} = .010, IC\ 95\ \% [-1.10, -.07]$).

En cuanto a los problemas de igualación, los análisis *post hoc* muestran que los aprendices de 3.º, 4.º y 5.º tienen un mayor promedio de acierto con respecto a los estudiantes de primero. Así, entre 3.º y 1.º la diferencia de medias es $.949, p_{\text{tukey}} < .001, IC\ 95\ \% [.39, 1.50]$; entre 4.º y 1.º la diferencia de medias es $.824, p_{\text{tukey}} = .002, IC\ 95\ \% [.23, 1.41]$, y entre 5.º y 1.º la diferencia de medias es $.788, p_{\text{tukey}} = .010, IC\ 95\ \% [.21, 1.37]$.

Un hallazgo interesante es que también hay diferencias relacionadas con la sintaxis. Por ejemplo, el problema de rectas cambio anterógrado ($a + b = ?$) es uno de los más fáciles para los participantes de todos los grados (72 participantes acertaron), mientras que la misma estructura semántica en sentido retrogrado ($c - a = ?$) resultó ser la más difícil (21 participantes acertaron). La diferencia es significativa ($t(85) = 9.455, p < .001, d = .582$).

Desempeño diferencial según tipo de material: formal vs. concreto

En relación con el tipo de material en que se presentaron los problemas de adición y sustracción a la muestra total de participantes, una prueba *t* de muestras emparejadas indica que existen diferencias en el desempeño según el tipo de material ($t(85) = 7.331, p < .001, d = 1.265$), siendo los problemas formales los que reportan mayor promedio de aciertos en comparación con los problemas concretos (medias de 4.13 y 3.13, respectivamente).

A nivel de grado, el ANOVA muestra diferencias significativas entre grados tanto en los problemas formales ($F(4, 81) = 4.011, p = .005, \eta^2 = .165$) como en los problemas concretos ($F(4, 81) = 5.441, p < .001, \eta^2 = .212$) (Figura 2).

En los problemas formales, los análisis *post hoc* muestran que los aprendices de 1.º tienen menor promedio de acierto que los aprendices de 3.º (Diferencia de medias: $-.952, p_{\text{tukey}} < .022, IC\ 95\ \% [-1.81, -.10]$), de 4.º (Diferencia de medias: $-1.118, p_{\text{tukey}} = .008, IC\ 95\ \% [-2.03, -.21]$) y 5.º (Diferencia de medias: $-.922, p_{\text{tukey}} = .041, IC\ 95\ \% [-1.82, -.03]$).

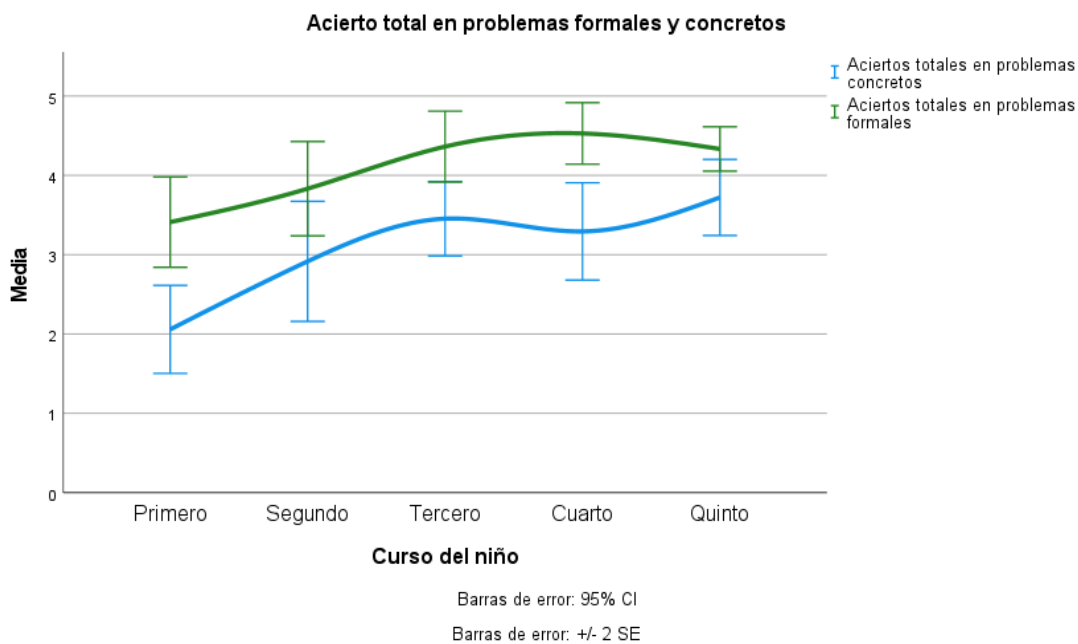
En cuanto a los problemas concretos, los análisis *post hoc* muestran que los aprendices de 3.º, 4.º y 5.º tienen un mayor promedio de acierto con respecto a los estudiantes de 1.º. Así, entre 3.º y 1.º la diferencia de medias es $1.396, p_{\text{tukey}} = .003, IC\ 95\ \% [.35, 2.44]$; entre 4.º y 1.º la diferencia de medias es $1.235, p_{\text{tukey}} = .021, IC\ 95\ \% [.13, 2.34]$ y entre 5.º y 1.º la diferencia de medias es $1.663, p_{\text{tukey}} < .001, IC\ 95\ \% [.57, 2.76]$.

Perfiles de sintonía comparando cohortes en la trayectoria

De los 10 problemas usados en la experiencia, 3 eran de cambio, 3 de combinación, 2 de igualación y 2 de comparación. La Figura 3 muestra de manera integrada las medias cuando se considera la trayectoria global de los grados examinados.

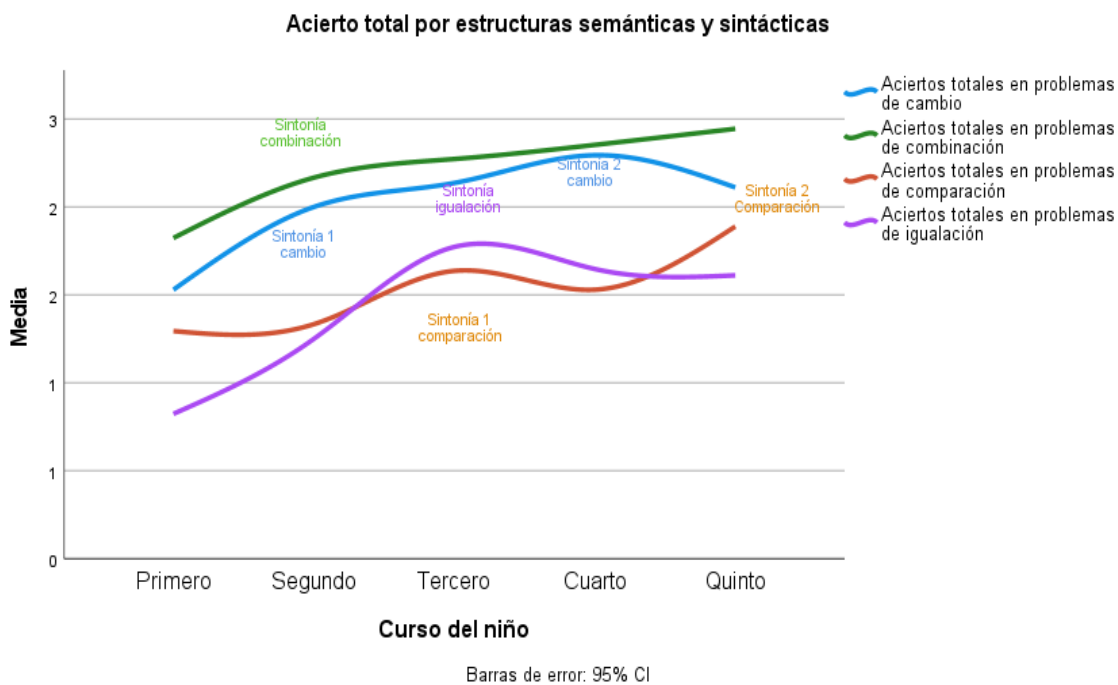
Como puede verse, los niños de segundo ya tienen la habilidad para resolver problemas de combinación y de cambio anterógrados. Los niños de tercero ya pueden solucionar problemas de comparación formal e igualación. Puede observarse un leve incremento entre los niños de cuarto y quinto grado en la resolución de problemas de cambio y comparación (Tabla 2).

Figura 2.
Trayectoria de acierto en problemas formales y concretos



Fuente: elaboración propia.

Figura 3.
Acierto por grados de acuerdo con estructuras semánticas y sintácticas



Fuente: elaboración propia.

Tabla 2.
Media de aciertos por estructura semántica por grado

Estructura semántica	Grado	Número de problemas presentados	Media	Desviación
Cambio	Primero		1.529	0.514
	Segundo		2.000	0.426
	Tercero	3	2.136	0.640
	Cuarto		2.294	0.470
	Quinto		2.111	0.583
Combinación	Primero		1.824	0.951
	Segundo		2.167	1.115
	Tercero	3	2.273	0.827
	Cuarto		2.353	0.786
	Quinto		2.444	0.705
Comparación	Primero		1.294	0.588
	Segundo		1.333	0.778
	Tercero	2	1.636	0.492
	Cuarto		1.529	0.624
	Quinto		1.889	0.471
Igualación	Primero		0.824	0.728
	Segundo		1.250	0.622
	Tercero	2	1.773	0.528
	Cuarto		1.647	0.606
	Quinto		1.611	0.608

Fuente: elaboración propia

Relación tiempo-acierto

Se halló correlación significativa inversa ($r(86) = -0.297, p = 0.006$) entre el tiempo de desarrollo de la experiencia y el puntaje total de aciertos (Figura 4). Aunque esta tendencia parece mantenerse para todas

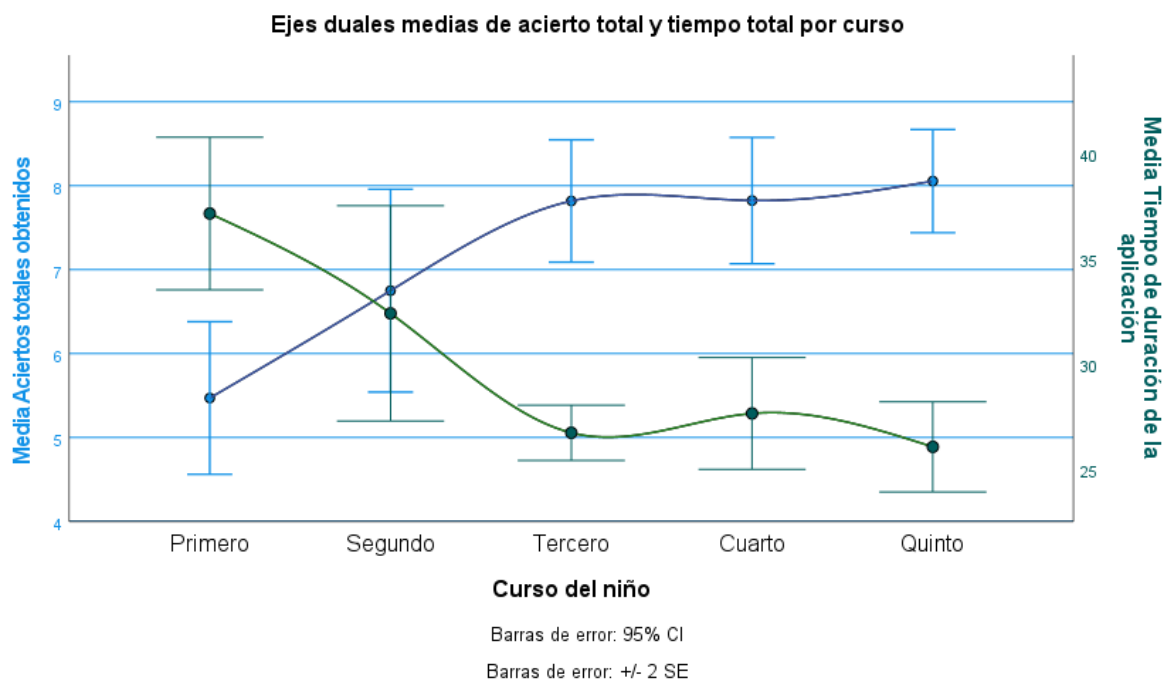
las estructuras semánticas, solo es significativa en el caso de los problemas más difíciles (Comparación: $r = -0.245, p = 0.023$; Igualación: $r = -0.339, p = 0.001$). A su vez, se halló correlación directa significativa entre los puntajes de acierto de todas las estructuras semánticas (Tabla 3).

Tabla 3.
Correlación entre los puntajes de acierto de las 4 estructuras semánticas

Variables	R	p	Tamaño del efecto
Cambio - Combinación	.308	.004	0.318
Cambio - Comparación	.291	.007	0.299
Cambio - Igualación	.344	.001	0.358
Combinación - Comparación	.342	.001	0.357
Combinación - Igualación	.239	.026	0.244
Comparación - Igualación	.313	.003	0.324

Fuente: elaboración propia.

Figura 4.
Relación tiempo acierto por curso



Fuente: elaboración propia.

Discusión

Los resultados de este estudio son consistentes con la hipótesis del enriquecimiento de habilidades. Al respecto, vale la pena enlistar la evidencia y vincularla con la discusión precedente. En primer lugar, los resultados son coherentes con la idea de que *la consolidación de la competencia emerge de la integración de variedades en el marco hábil del agente*. Para comprender esto es crucial notar que, en esta investigación, el desempeño de los aprendices es diferente de acuerdo con las diversas estructuras semánticas, pero simultáneamente muestra una tendencia a la integración que puede verse en las altas correlaciones positivas entre los puntajes de las distintas estructuras.

En segundo lugar, los resultados acreditan la postura según la cual *las habilidades están enlazadas con configuraciones específicas del entorno de actividad*. En nuestro caso, cada estructura semántica, e incluso cada variedad sintáctica, establece una *solicitud* diferente para el aprendiz de la adición o la sustracción. Los resultados muestran que la adquisición de las habilidades necesarias para tratar con situaciones aditivas de combinación y cambio anterógrado se

produce de manera más temprana que lo que ocurre en los casos de igualación, comparación y cambio retrógrado. Este es un resultado muy significativo porque es coherente con el análisis pedagógico de la didáctica de la matemática en Colombia (Barboza *et al.*, 2013), que señala que los maestros tienden a privilegiar, al principio de la enseñanza de la adición, los casos de integración y modificación de conjuntos de objetos. En breve, las habilidades que emergen primero en los niños de segundo y tercero en nuestro estudio son precisamente aquellas que son motivo de instrucción formal en la escuela colombiana: problemas de combinación o cambio en colecciones de objetos.

En tercer lugar, el carácter sociocultural del aprendizaje de la adición y la sustracción puede notarse claramente en la diferencia de desempeño entre problemas formales y concretos. Los problemas formales presentan la información de manera muy similar a los ejercicios y actividades que los niños y niñas desarrollan en su quehacer cotidiano en la escuela. Los resultados de este estudio muestran que estos son *el tipo de problema que el aprendiz escolarizado está habituado a resolver*. Que los problemas concretos sean más difíciles es un dato que debe ser

interpretado con cautela. Otros estudios han venido mostrando que entre niños y niñas no escolarizados o con bajo nivel de desempeño en las pruebas escolares estandarizadas pueden hallarse altos niveles de desempeño en resolución de problemas concretos (Aroca, 2015; Carraher *et al.*, 2000). En consonancia, lo que parece ser central para el estudio del enriquecimiento de las habilidades es la concordancia entre la actividad cotidiana del individuo y las demandas que impone una tarea que ha de ser evaluada.

En cuarto lugar, la relación entre el tiempo de resolución de las tareas y el nivel de acierto de los participantes es una evidencia en favor de la interpretación según la cual *el aprendizaje de la adición y la sustracción se consolida como una sintonía metaestable*. Esto es, en cada trayectoria de aprendizaje parece existir un punto en el que los aprendices reconocen con mayor facilidad cierto tipo de problemas y hallan soluciones con mayor celeridad. La Figura 4 muestra que los niños y niñas de tercero en adelante han alcanzado esa “meseta OK” en la que pueden reconocer, interpretar y resolver problemas de adición y sustracción en general. Ahora bien, es posible que aún los niños de grado quinto puedan tener dificultad para lidiar con ciertos problemas (los de cambio retrógrado o los de comparación en

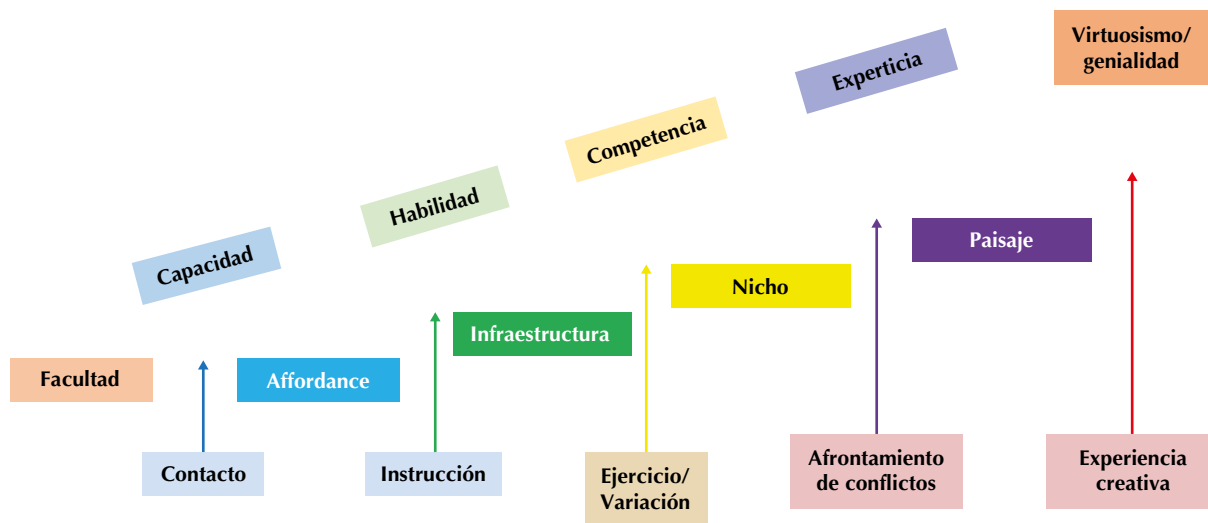
situaciones concretas), especialmente si se trata de situaciones que presentan variaciones poco frecuentes, exigen modificación adicional de la información (como al imaginar el inverso) o se alejan de los criterios normativos ya aceptados en la cotidianidad (como al comparar cantidades divergentes en otras dimensiones: “Juan tiene dos balones y Pedro cinco dados, ¿quién tiene más juguetes?”).

Este estudio se propuso explorar la consolidación de la competencia aditiva en el contexto de la discusión contemporánea sobre la adquisición y desarrollo de habilidades a lo largo de la trayectoria educativa. Los hallazgos de este estudio están restringidos por su carácter exploratorio y por el tamaño de la muestra.

Los hallazgos son consistentes con el modelo CAF propuesto por Rietveld (2022) y con las ideas de Acosta-Silva y Vasco (2013) y Acosta-Silva (2022) respecto a la existencia de diversos niveles de consolidación. Hemos denominado a esa integración teórica como la *hipótesis del enriquecimiento de habilidades*. Se puede hacer más explícito el eje de esta coordinación teórica al notar que es posible *pensar un marco ecológico del despliegue del nivel de desarrollo en cada nivel de consolidación* de la habilidad (Figura 5).

Figura 5.

Trayectoria de la consolidación del aprendizaje desde el marco situado



Fuente: elaboración propia.

Nuestra propuesta, algo esquemática entonces, es que el CAF puede adaptarse para describir las relaciones sistemáticas entre la exposición a un paisaje de *affordances* y la generación de interacciones socioculturalmente arregladas para fomentar la adquisición de diversos niveles de habilidad. En ese sentido, este estudio examina el paso del despliegue de una habilidad *instruida* en la escuela, fomentada con una *infraestructura* que incluye el arreglo de situaciones aditivas, para las que se introduce al aprendiz en diversas *variaciones* posibles.

De este estudio se siguen posibilidades de investigación conectadas con las ideas anteriores, a saber: a) ¿puede evidenciarse enriquecimiento de habilidades en otros dominios del aprendizaje escolar?; b) ¿se mantienen las tendencias de este estudio en niveles superiores del aprestamiento en aritmética, al estudiar la competencia con operaciones de multiplicación o división, por ejemplo?; c) ¿pueden generarse ideas pedagógicas que fomenten el desarrollo de competencias que deriven de la propuesta de enriquecimiento de habilidades?

Como puede verse, el panorama abre un *paisaje* (Rietveld y Kiverstein, 2014) rico en posibilidades de indagación. A nivel pedagógico, estas posibilidades pueden incidir positivamente en la enseñanza de la matemática básica desde perspectivas situadas, tales como, por ejemplo, el ecoanálisis (Chavarría y Castro, 2006), la pedagogía culturalmente relevante, la enseñanza culturalmente responsable y los entornos de clase sensibles culturalmente (Clements *et al.*, 2023).

Referencias

Acosta-Silva, D. A. (2022). *Nativos digitales: entre mitos y competencias*. Corporación Universitaria Unitec. https://www.researchgate.net/publication/364821276_Nativos_digitales_entre_mitos_y_competencias

Acosta-Silva, D. A. y Vasco, C. E. (2013). *Habilidades, competencias y experticias: Más allá del saber qué y el saber cómo*. Centro de Publicaciones Académicas de la Corporación Universitaria (UNITEC), Centro de Estudios Avanzados en Niñez y Juventud de la Universidad de Manizales y Fundación Centro Internacional de Educación y Desarrollo Humano (CINDE). https://www.researchgate.net/profile/David-Acosta-Silva/publication/265784268_Habilidades_competencias_y_experticias_mas_alla_del_saber_que_y_el_saber_como/links/5dcccdaa92851c382f3ada87/Habilidades-competencias-y-experticias-mas-alla-del-saber-que-y-el-saber-como.pdf

Anderson, S., Schurig, M., Sommerhoff, D. y Gebhardt, M. (2022). Students' learning growth in mental addition and subtraction: Results from a learning progress monitoring approach. *Frontiers in Psychology*, (13), article 944702. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.944702>.

Aroca, A. (2015). ¿Sumar = restar? una perspectiva etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática. Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, 8(2), 237-255. <https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/210>

Aroca, A., Álvarez, L. y Rodríguez, C. (2024). *Matemáticas en juegos infantiles tradicionales de la Costa Caribe Colombiana*. Sello Editorial Universidad del Atlántico. <https://investigaciones.uniatlantico.edu.co/omp/index.php/catalog/catalog/view/201/201/854>

Barboza, J., Bertel, J. del C., Arias, E. y Garrido, J. (2013). La adición en los textos del programa "Todos a Aprender". *Revista Científica*, 17(2), 373-377. <https://doi.org/10.14483/23448350.7078>

Baroody, A. (2024). Fostering early numeracy in preschool and kindergarten. En R. Tremblay, M. Boivin y RDeV. Peters (eds.), *Encyclopedia on Early Childhood Development* [online]. <https://www.child-encyclopedia.com/numeracy/according-experts/fostering-early-numeracy-preschool-and-kindergarten>

Bedoya, Y., Martín-Fiorino, V. y Holguín, A. (2022). Factores emocionales en el aprendizaje de las matemáticas. Una experiencia en la educación básica. *Latitude*, 1(15), 7-29. <https://doi.org/10.55946/latitude.v1i15.175>

Bonilla, M., Sánchez, N. y Vidal, M. (1999). *Cómo enseñamos la aritmética. Algunos conceptos aritméticos en profesores de primaria*. IDEP, Universidad Distrital Francisco José de Caldas y Gráficas Teusaquillo.

Bruineberg, J., Seifert, L., Rietveld, E. y Kiverstein, J. (2021). Metastable attunement and real life skilled behaviour. *Synthese*, (199), 12819-12842. <https://doi.org/10.1007/s11229-021-03355-6>

Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (2000). *En la vida diez en la escuela cero*. Siglo Veintiuno.

Carpenter, T., Hiebert, J. y Moser, J. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12(1), 27-39. <https://doi.org/10.2307/748656>

Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelización*. Grupo Editorial Iberoamérica. <https://bit.ly/2PSPAWI>

- Chavarría, M. y Castro, C. (2006). Ecoanálisis como puerta de entrada a la decodificación de lo cotidiano: hacia una educación posible. *Revista Electrónica Actualidades Investigativas en Educación*, 6(3), 1-35. <https://www.redalyc.org/pdf/447/44760305.pdf>
- Clements, D. y Sarama, J. (2014). *Learning and teaching for early math: The learning trajectories approach*. Routledge.
- Clements, D., Lizzcano, R. y Sarama, J. (2023). Research and pedagogies for early math. *Education Sciences*, 13(8), 839. <https://doi.org/10.3390/educsci13080839>
- Daro, P., Mosher, F. y Corcoran, T. (2011). *Learning trajectories in mathematics: A foundation for standards, curriculum, assessment and instruction*. Consortium for Policy Research in Education. University of Pennsylvania. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED519792.pdf>
- Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D. y Nuerk, H. C. (2015). Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology*, (6), Article 348. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00348>
- Escobar-Pérez, J., Herrera-Rojas, A. N. y Gea, M. M. (2019). Identificación de precurrenentes para el pensamiento estadístico y probabilístico en niños de primaria a través de la estrategia del mapeo conceptual. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-10). <https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/escobar.pdf>
- Evans, D. y Field, A. P. (2020). Predictors of mathematical attainment trajectories across the primary-to-secondary education transition: parental factors and the home environment. *Royal Society Open Science*, (7), Article 200422. <http://dx.doi.org/10.1098/rsos.200422>
- Fajardo, J. A. y Santana, A. C. (2019). Emociones en el aprendizaje situado en la escuela: Una revisión sistemática de la investigación actual. En *Memorias del V Congreso Internacional de Investigación y Pedagogía* (pp. 2-25). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. <http://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/5091>
- Fritz, A., Ehlert, A. y Balzer, L. (2013). Development of mathematical concepts as basis for an elaborated mathematical understanding. *South African Journal of Childhood Education*, 3(1), 38-67. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1187400.pdf>
- Gallagher, S. (2013). The socially extended mind. *Cognitive Systems Research*, (25-26), 4-12. <https://doi.org/10.1016/j.cogsys.2013.03.008>
- Gilmore, C. y Spelke, E. (2008). Children's understanding of the relationship between addition and subtraction. *Cognition*, 107(3), 932-945. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2007.12.007>
- Gómez, P., Castro, P., Bulla, A., Mora, M. F. y Pinzón, A. (2016). Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas: Revisión crítica y propuesta de ajuste. *Revista Educación y Educadores*, 19(3), 315-338. <https://doi.org/10.5294/edu.2016.19.3.1>
- González, N., Riveros, J. y Díaz, A. (2022). Dificultades en la resolución de problemas aditivos simples en estudiantes de segundo grado. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 17(2), 246-267. <https://doi.org/10.14483/23464712.16876>
- Guntur, M., Sahronih, S., Septia, N. y Windari, P. (2023). The learning trajectory based on STEM of elementary school pupils' in solving proportion material: Didactical desig-research. *Participatory Educational Research*, 10(6), 84-103. <http://dx.doi.org/10.17275/per.23.90.10.6>
- Hämäläinen, R., Nissinen, K., Mannonen, J., Lämsä, J., Leino, K. y Taajamo, M. (2021). Understanding teaching professionals' digital competence: What do PIAAC and TALIS reveal about technology-related skills, attitudes, and knowledge? *Computers in Human Behavior*, (117), Article 106672. <https://doi.org/10.1016/j.chb.2020.106672>
- Heft, H. (2013). Environment, cognition, and culture: Reconsidering the cognitive map. *Journal of Environmental Psychology*, (33), 14-25. <https://doi.org/10.1016/j.jenvp.2012.09.002>
- Heras-Escribano, M. y Pinedo-García, M. de. (2018). Affordances and landscapes: Overcoming the nature-culture dichotomy through niche construction theory. *Frontiers in Psychology*, 8(enero), 1-15. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2017.02294>
- Jones, D. (2017). Embodied cognitive ecosophy: The relationship of mind, body, meaning and ecology. *Geografiska Annaler, Series B: Human Geography*, 99(2), 156-171. <https://doi.org/10.1080/04353684.2017.1306971>
- López, E. (2016). En torno al concepto de competencia: Un análisis de fuentes. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 20(1), 311-322. <https://www.redalyc.org/pdf/567/56745576016.pdf>
- Martínez, F., Llinares, S. y Torregrosa, G. (2015). *Propuestas de enseñanza centradas en una trayectoria de aprendizaje de un contenido matemático usando materiales didácticos* (ponencia). XIII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria, Universidad de

- Alicante, 2 y 3 de julio de 2015 (pp. 585-600). https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/49152/1/XIII_Jornadas_Redes_45.pdf
- Maza, C. (2001). Adición y sustracción. En C. Maza (ed). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 1-21). Síntesis. <https://bit.ly/2lxCI2q>
- Membrive, A., Silva, N., Rochera, M. y Merino, I. (2022). Advancing the conceptualization of learning trajectories: A review of learning across contexts. *Learning, Culture and Social Interaction*, (37), Article 100658. <https://doi.org/10.1016/j.lcsi.2022.100658>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas*. DBA. v. 2. Ministerio de Educación Nacional. https://www.colombiaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_Matematicas-min.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2022). *Trayectorias educativas completas, continuas y de calidad. Conceptualización y avances estratégicos* (nota técnica). Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineduacion.gov.co/1780/articles-363488_recurso_35.pdf
- Mutaqin, E., Asyari, L., Tetep, T. y Hamdani, N. (2021). Mathematical learning trajectory in primary school. *Journal of Physics: Conference Series*, (1987), Article 012032. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1987/1/012032>
- Núñez, M. y Santamarina, M. (2014). Prerrequisitos para el proceso de aprendizaje de la lectura y la escritura: conciencia fonológica y destrezas orales de la lengua. *Lengua y Habla*, 18, 72-92. <https://www.redalyc.org/pdf/5119/511951374006.pdf>
- Ramírez, M. y Castro, C. de. (2016). Caminos de aprendizaje para problemas aritméticos de estructura aditiva de sustracción. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación*, 16, 167-191. <https://www.redalyc.org/pdf/771/77145288008.pdf>
- López, M. y Rodríguez, S. (2020). Métodos y técnicas de investigación en el análisis de trayectorias y transiciones educativas en México. *Revista Electrónica en Educación y Pedagogía*, 4(6), 86-104. <https://www.redalyc.org/journal/5739/573963807006/html/>
- Paliwal, V. y Baroody, A. (2020). Fostering the learning of subtraction concepts and the subtraction-as-addition reasoning strategy. *Early Childhood Research Quarterly*, 51, 403-415. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.05.008>
- Páramo, P., Hederich, C., Lopez, O., Sanabria, L. y Camargo, Á. (2015). ¿Dónde ocurre el aprendizaje? *Psicogente*, 18, 320-335. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=497551993008>
- Peres, C. y Vargas, B. (2021). Systematic review on the precursors of initial mathematical performance. *International Journal of Educational Research Open*, 2, Article 100035. <https://doi.org/10.1016/j.ijedro.2021.100035>
- Pérez, G. y Vera, J. (2012). Lógica subyacente de la enseñanza de la suma y resta en profesores de primero a tercer grado escolar. *Tiempo de Educar*, 13(25), 51-81. <https://www.redalyc.org/pdf/311/31124808003.pdf>
- Rietveld, E. (2008). Situated normativity: The normative aspect of embodied cognition in unreflective action. *Mind*, 117(468), 973-1001. <https://doi.org/10.1093/mind/fzn050>
- Rietveld, E. (2022). Change-ability for a world in flux. *Adaptive Behavior*, 30(6), 613-623. <https://doi.org/10.1177/10597123221133869>
- Rietveld, E., Denys, D. y Westen, M. van. (2018). Ecological-enactive cognition as engaging with a field of relevant affordances: The Skilled Intentionality Framework (SIF). En A. Newen, L. L. de Bruin y S. Gallagher (eds.), *Oxford Handbook of 4E Cognition* (pp. 41-70). Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780198735410.013.3>
- Rietveld, E. y Kiverstein, J. (2014). A rich landscape of affordances. *Ecological Psychology*, 26(4), 325-352. <https://doi.org/10.1080/10407413.2014.958035>
- Rodrigues, M., Fernández-Macías, E. y Sostero, M. (2021). *A unified conceptual framework of tasks, skills and competences*. European Commission, 2021, JRC121897. https://joint-research-centre.ec.europa.eu/document/download/806566f3-82b9-45fc-8092-78d66c36d7e5_en
- Sagástegui, D. (2004). Una apuesta por la cultura: El aprendizaje situado. *Revista Electrónica Sinéctica*, 24, 30-39. <https://www.redalyc.org/pdf/998/99815918005.pdf>
- Santana-Espitia, A. (2019). *Modelo de evaluación de las dificultades de aprendizaje de la adición y la sustracción* (tesis de doctorado, Universidad Nacional de Colombia). <https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/69811/52983445.2018.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Santana, A. C., Fajardo, J. A. y Herrera, A. N. (2018). El aprendizaje situado de la adición y la sustracción. *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas. Perspectivas Socioculturales de la Educación Matemática*, 11(2), 98-119. <https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/515/440>

- Sinaga, F. I. S. (2024). Hypothetical learning trajectory based on ethnomathematics. *NUSRA: Jurnal Penelitian Dan Ilmu Pendidikan*, 5(1), 333-341. <https://doi.org/10.55681/nusra.v5i1.2230>
- Schalk, L., Saalbach, H., Grabner, R. y Stern, E. (2016). Relational quantitative reasoning in kindergarten predicts mathematical achievement in third grade. *Journal of Numerical Cognition*, 2(2), 77-90, <https://doi.org/10.5964/jnc.v2i2.29>
- Schneider, M. y Stern, E. (2009). The inverse relation of addition and subtraction: A knowledge integration perspective. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(1-2), 92-101. <https://doi.org/10.1080/10986060802584012>
- Vasco, C. (1990). El aprendizaje de las matemáticas elementales como proceso condicionado por la cultura. *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 6, 5-25. https://www.researchgate.net/publication/28269208_El_aprendizaje_de_las_matematicas_elementales_como_proceso_condicionado_por_la_cultura
- Valiente, C., Parker, J., Swanson, J., Bradley, R. y Groh, B. (2019). Early elementary student-teacher relationship trajectories predict girls' math and boys' reading achievement. *Early Childhood Research Quarterly*, 49, 109-121. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2019.05.001>
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. Trillas.
- Vitello, S., Grotzer, T. y Shaw, S. (2021). *What is competence? A shared interpretation of competence to support teaching, learning and assessment*. Cambridge University Press & Assessment. <https://www.cambridgeassessment.org.uk/Images/645254-what-is-competence-a-shared-interpretation-of-competence-to-support-teaching-learning-and-assessment.pdf>
- Zhu, Z. (2023). International comparative study of learning trajectories based on TIMSS 2019 G4 data on cognitive diagnostic models. *Frontiers in Psychology*, 14, Article 1241656. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2023.1241656>

Anexo 1. Consentimiento informado padres de familia

FUNDACIÓN CENTRO
INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN
Y DESARROLLO HUMANO

Centro de Investigación y Desarrollo reconocido por Colciencias

CONSENTIMIENTO VERBAL

Yo, _____, con documento de identificación _____, padre /madre del niño (a) _____, con fecha de nacimiento del niño (a) DIA _____ MES _____ AÑO _____, autorizo nuestra participación en el estudio titulado: **Las emociones epistémicas en el aprendizaje de la adición y la sustracción**, coordinado por el psicólogo Jesús Armando Fajardo Santamaría, que tiene como propósito examinar el funcionamiento de la conducta afectiva en el aprendizaje de la adición y la sustracción.

Se me ha comunicado que no hay riesgos físicos ni psicológicos para el niño relacionados con su participación en el estudio. También se me indicó que todos los archivos electrónicos asociados a esta investigación serán protegidos con clave y bajo ningún motivo serán compartidos con personas ajenas a la investigación. Al finalizar el estudio, el investigador puede publicar los resultados y divulgar la información pertinente para dar a conocer la investigación con la debida protección de la información personal de los participantes.

Acepto que para efectos de sistematización de los datos esta sesión de aplicación sea grabada y entiendo que algunos extractos de la misma podrían usarse para divulgación en contextos académicos. Entiendo que mi hijo (a) y yo podemos dejar de participar en cualquier momento.

Autorizo esta participación mía y del (la) niño(a) a los _____ días del mes de _____ del año _____

Anexo 2. Asentimiento informado estudiantes

FUNDACIÓN CENTRO
INTERNACIONAL DE EDUCACIÓN
Y DESARROLLO HUMANO

Centro de Investigación y Desarrollo reconocido por Colciencias

ASENTIMIENTO VERBAL

Yo, _____, que estudio en el colegio _____, y tengo _____ años, quiero participar en esta investigación sobre **las emociones en el aprendizaje de la suma y la resta**.

Sé que puedo dejar de participar cuando yo quiera y no me siento presionado(a) para hacer esta actividad.