Sistemas de representación no-usuales en la formación de profesores como estrategia para comprender los procesos de aprendizaje de objetos matemáticos

- Non-Usual Representation Systems in Teacher Training as a Strategy to Understand the Learning Processes of Mathematical Objects
- Sistemas de representação não-usuais na formação de professores como estratégia para compreender os processos de aprendizagem de objetos matemáticos

Natalia Morales Rozo*

* Magíster en Docencia de la Matemática; docente e investigadora, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional. Correo electrónico: nmoralesr@pedagogica.edu.co. Código Orcid: https://orcid.org/0000-0002-8559-0470

Resumen

A partir del interés en construir experiencias académicas significativas que favorezcan las relaciones con el saber pedagógico, didáctico y matemático del futuro profesor de matemáticas, este artículo de reporte de caso exhibe rasgos de la actividad matemática implicada en la tarea de elaborar gráficas de funciones en un sistema de representación no-usual, en el cual los ejes son dos rectas paralelas. Dicha tarea promueve en los futuros profesores la reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, la construcción del conocimiento didáctico del contenido matemático y el estudio del conocimiento matemático a enseñar. Con dicha actividad se pretende: generar un ambiente novedoso de aprendizaje, que emula algunas condiciones que se dan en la educación básica o media en torno al estudio de funciones polinómicas de primer grado y su representación en el plano cartesiano, sin desconocer los conocimientos de índole didáctico y matemático que ya hacen parte del conocimiento profesional de los futuros profesores; posicionar al futuro profesor en el rol de estudiante con el fin de que sea consciente de la importancia de reconocer los procesos de aprendizaje y el agente estudiante, como puntos de partida en el diseño de procesos de enseñanza; y promover una discusión en la comunidad académica de formadores de profesores sobre las matemáticas que se deben enseñar, en respuesta a las demandas del sector educativo, que será el campo de acción de los futuros docentes.

Palabras clave:

actividad matemática; enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; formación de profesores de matemáticas; función

Fecha de recepción: 18/08/2020
Fecha de aprobación: 24/11/2020

CC BY NC

Abstract

Based on interest of constructing significant academic experiences that favor relationships with the pedagogical, didactic and mathematical knowledge of the future mathematics teacher, this article exhibits features of the mathematical activity involved in the task of drawing graphs of functions in a non-usual representation system, in which the axes are two parallel lines. This task encourages future teachers to reflect about the teaching-learning processes of school mathematics, the construction of didactic knowledge of mathematical content, and the study of mathematical knowledge to be taught. This activity is intended to: generate a new learning environment, which emulates some conditions that occur in basic or secondary education around the study of first-grade polynomial functions and their representation in the Cartesian plane, without ignoring the knowledge of the nature didactic and mathematical that are already part of the professional knowledge of future teachers.In addition, position the future teacher in the role of student in order to be aware of the importance of recognizing the learning processes and the student agent, for the design of teaching processes, to finally promote a discussion in the academic community of teacher educators on the mathematics that should be taught, in response to the demands of education sector, which will be the field of action of future teachers.

Keywords:

function; mathematical activity; mathematics teacher training; mathematics teaching-learning

Resumo

Partindo do interesse de construir experiências acadêmicas significativas que favoreçam relações com os saberes pedagógicos, didáticos e matemáticos do futuro professor de matemática, este artigo apresenta características da atividade matemática envolvida na tarefa de elaborar gráficos de funções em um sistema de representação não-usual, em que os eixos são duas retas paralelas. Esta tarefa incentiva os futuros professores a refletir sobre os processos de ensino-aprendizagem da matemática escolar, na construção do conhecimento didático de conteúdos matemáticos, e o estudo do conhecimento matemático a ser ensinado. Esta atividade pretende: gerar um novo ambiente de aprendizagem, que simula algumas condições que ocorrem no ensino básico ou médio ao respeito do estudo das funções polinomiais do primeiro grau e sua representação no plano cartesiano, sem ignorar o conhecimento da natureza didáticas e matemáticas que já fazem parte do saber profissional dos futuros professores; posicionar o futuro professor no papel do aluno, de forma a ter consciência da importância de reconhecer os processos de aprendizagem e o agente aluno, como pontos de partida na concepção de processos de ensino; e promover uma discussão na comunidade acadêmica de formadores de professores sobre a matemática que deve ser ensinada, em resposta às demandas do setor de educação, que será o campo de ação deste grupo de futuros professores.

Palavras-chave:

atividade matemática; ensino-aprendizagem de matemática; formação de professores de matemática; função

Introducción y antecedentes

Desde la perspectiva de la propuesta curricular para la educación básica y media en matemáticas que ofrece los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación nacional-MEN (1998) de Colombia, se asume como eje articulador la búsqueda de un equilibrio entre los procesos presentes en toda actividad matemática (resolución de problemas, razonamiento, comunicación, y modelación) y los conocimientos asociados a los procesos que desarrollan pensamiento matemático. Por tanto, se hace necesario, no solo reconocer la importancia de estos elementos en el aula de matemáticas escolar, sino que además se debe desarrollar la capacidad de reflexionar e incorporar tales elementos conceptuales en la formación de profesores de matemáticas; esto último, corresponde al contexto de interés del presente estudio.

Por su parte, como formadora de profesores de matemáticas, en la Universidad Pedagógica Nacional percibo que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y reflexionar sobre los procesos de aprendizaje que circundan ante los procesos de enseñanza de las matemáticas escolares. A su vez encuentro, por un lado, que uno de los núcleos centrales de la formación disciplinar comprende el conjunto de temas/problemas propios de las Matemáticas o de los saberes interdisciplinarios afines a esta; y, por otro, que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tienen en cuenta la reflexión sobre el saber pedagógico y didáctico en sus relaciones con el saber matemático.

Es por esto, que bajo este contexto es pertinente formular actividades que propicien la construcción personal y profesional de una visión y una actitud pedagógica como saber fundante de la profesión del educador matemático. De lo anterior, surgió la necesidad de proponer una actividad matemática en la que se reconocieran tales procesos a partir de una experiencia académica significativa que favorezca las relaciones con el saber pedagógico, didáctico y matemático del futuro profesor de matemáticas; esto busca la conversión del conocimiento en potencial formativo, a partir del reconocimiento de su estructura y valor sociocultural, en el campo de la Educación.

De otro modo, este artículo fue motivado y tuvo en cuenta las apreciaciones realizadas por diversos académicos del campo de la Educación Matemática y de las Matemáticas, en el marco de los siguientes eventos académicos desarrollados en diferentes ciudades de Colombia: el *III Congreso Nacional de Formadores en Matemáticas y en Física*, el *XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas*, y la *XXVIII Semana del Educador Matemático*; a través del taller titulado "Gráficas no usuales de funciones usuales: Un apoyo a la construcción de empatía para la enseñanza", la ponencia "¿Puede la gráfica de una función afín ser un punto y la gráfica de una función cuadrática ser una recta?" desarrollada por Guacaneme et ál. (2011), y la conferencia "¿La representación gráfica de la ecuación $y=mx+b$, puede ser un punto?", respectivamente.

Adicional a esto, al reconocer al profesor de matemáticas, entre otros aspectos, como agente orientador, dinamizador e innovador de procesos pedagógicos centrados en la enseñabilidad y educabilidad de las matemáticas escolares, se hace necesario que construya, reconozca y consolide elementos propios de cada uno de los agentes de la tríada didáctica inmersa en el aula de Matemáticas. Es por esto que es importante situar al futuro profesor en el rol de estudiante para que reconozca, entre otros asuntos, los problemas de aprendizaje de las matemáticas escolares y los procesos que llevan a cabo los estudiantes a nivel de educación básica y media usando como estrategia el estudio de funciones y su representación gráfica en un sistema no-usual de graficación.

Es por ello, que se introduce y se asume como objeto de estudio para la presente propuesta la enseñanza de funciones polinómicas de primer grado y sus diferentes tipos de representación, como garante para la reflexión sobre la propia constitución de objetos matemáticos alrededor de temas de interés obligatorios en la educación escolar, siendo consciente de que esto último será el campo de acción de los futuros profesores.

Es en este sentido que el objetivo de este trabajo es presentar una posible actividad matemática que acerque a los futuros profesores a comprender, en mayor grado de significancia, no solo los elementos matemáticos en relación con las funciones y su representación gráfica, sino que reconozcan la importancia de llevar a sus futuros estudiantes al ejercicio de "hacer matemáticas", lo cual se considera posible si los primeros son capaces de revivir y reconocer los elementos propios del agente estudiante, en un aula de matemáticas convencional. Una de las metas es poder incidir en el quehacer docente de los futuros profesores, en sintonía con la "secuenciación" de los saberes matemáticos en la escuela, a través del reconocimiento desde la experiencia de ser estudiante, de los procesos cognitivos que se llevan a cabo durante el estudio de las matemáticas.

Dado que la actividad propuesta tiene varias formas de ser abordada, se espera que esto capte el interés de los estudiantes porque implica reconocer la versatilidad inherente a los procesos de aprendizaje y la solución de situaciones-problema en el campo de las Matemáticas. El propósito es múltiple: construir conocimientos pedagógicos y didácticos en torno a los procesos de aprendizaje de las matemáticas, reconocer el aula de matemáticas como un lugar idóneo para hacer actividad matemática, afianzar los conocimientos matemáticos adquiridos por los estudiantes en su etapa escolar y despertar el interés de los estudiantes.

Finalmente, el reconocimiento del proceso de aprendizaje como parte del proceso de construcción de conocimiento matemático a nivel escolar lleva al futuro profesor de matemáticas a identificar el conflicto cognitivo usual que tiene un estudiante entre sus conocimientos previos y las situaciones nuevas que se disponen continuamente en el aula de matemáticas; lo que conduce al primer agente a reconocer la necesidad de crear situaciones con el fin de producir un aprendizaje significativo para los estudiantes y ser consciente de la importancia de planear la clase de matemáticas, teniendo en cuenta la población estudiantil inmersa.

Marco teórico

A continuación, se describen los principales componentes teóricos que enmarcan el trabajo realizado en relación con: el sistema de representación a utilizar en la actividad propuesta, los elementos de discusión sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje en el campo de la Educación Matemática y el marco de formación de profesores de matemáticas y lo que se asume por actividad matemática. En caso de que se requiera alguna precisión sobre los elementos matemáticos (funciones y graficación) inmersos en la actividad propuesta, se sugiere hacer una revisión de los apartados propuestos por Stewart et ál. (2001).

En el marco de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que ofrecen las diferentes propuestas curriculares en Colombia, se evidencia y se menciona que el plano cartesiano ha sido tomado como sistema de representación ideal en la enseñanza de las matemáticas escolares. Sin embargo, relacionando esta forma de representación con las posturas, quizás no fundamentadas, de los futuros profesores y de algunos profesores en ejercicio frente al modo de interacción del estudiante con el sistema de representación referido, es de resaltar que los educadores dan a conocer su concepción como un hecho de que los estudiantes presentan dificultades que no deberían estar durante la apropiación de este objeto matemático; esta percepción se debe a que el educador, el cual se espera que conozca la temática a profundidad y con total dominio, cree que para el estudiante este estudio no debería presentar mayor dificultad debido a su "simpleza".

Por ello, la actividad propuesta implica que los futuros docentes utilicen como sistema de representación el reportado por Nachmias et ál. (1990): *Parallel Axes Representation* (plano PAR), en el cual una coordenada es representada por una recta determinada por los puntos x y y de los respectivos ejes, y no por un punto como ocurre en el plano cartesiano. En el plano PAR (Figura 1) los ejes x y y son dos rectas paralelas, graduadas con la misma unidad de medida; por convención el trazo de los ejes serán rectas verticales y los reales positivos estarán en la parte superior respecto a la "línea de origen" o (recta perpendicular a los ejes por los puntos $x=0$ y $y=0$). Nótese, que esta configuración determina un conjunto de sextantes, a diferencia del plano cartesiano que está conformado por cuadrantes.

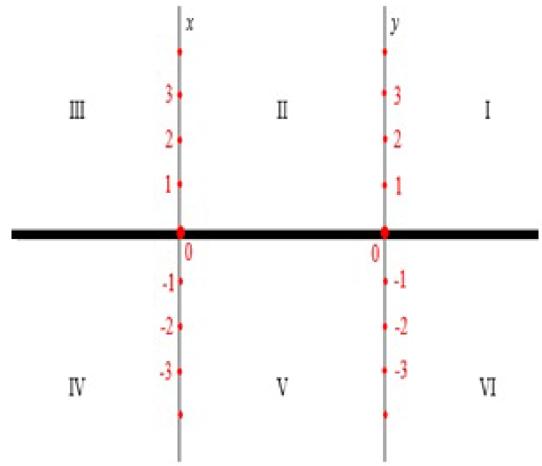

Figura 1. Plano PAR

Fuente: elaboración propia.

Dada una coordenada P(x, y), para representarla en el plano PAR (Figura 2), se ubica la primera componente en el eje x y la segunda componente en el eje y, y se traza la recta determinada por esos dos puntos; esta recta corresponde a la coordenada P(x, y).

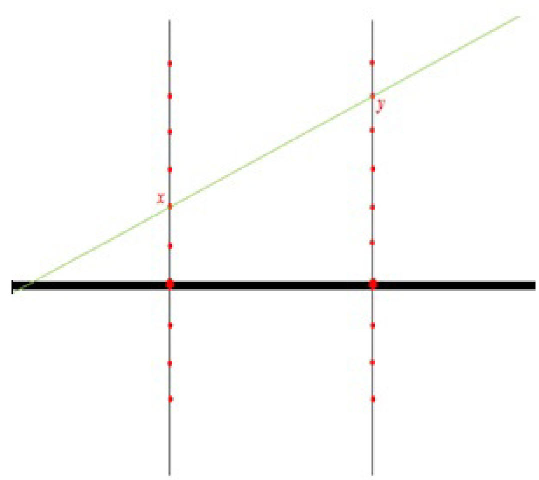

Figura 2. Coordenada P(x, y) en el plano PAR

Fuente: elaboración propia.

Así, como la representación gráfica asociada al plano cartesiano permite estudiar las funciones polinómicas, cualquier otro sistema de representación admite construir por analogía el estudio predispuesto. Particularmente, en este sistema de representación no-usual es posible desarrollar conceptualizaciones que generalizan o cuestionan las nociones de pendiente, función, ecuación, entre otras. Todo esto, con el fin de familiarizar a los estudiantes con otras formas de representación y de consolidar los caminos posibles en que se puede razonar en una situación-problema matemática específica.

Como lo indica Pólya, según Samper (1999), una situación problemática deja de ser problema si el estudiante a quien se le plantea no está interesado en resolverlo; esta falta de interés es motivada, entre otros aspectos, si el tema no es llamativo. En este sentido, es "natural" que un problema de nivel escolar no sea de interés para un estudiante de educación superior, futuro profesor de matemáticas; por tanto, es necesario que los formadores de profesores proporcionen actividades acordes a su nivel y que enriquezcan su conocimiento profesional en pro de su quehacer docente futuro, lo que no implica desligarlas del contenido matemático escolar en su totalidad.

Por su parte, El Bouazzaoui (1996) plantea que, en el terreno de la práctica, es en los procesos de aprendizaje donde se manifiestan los errores y dificultades. Estas últimas, emergen cuando la solución de un problema exige el enriquecimiento "estructural" del concepto, es decir, cuando se precisa un cambio importante en el conocimiento matemático correspondiente para solucionar el problema. Es por esto que se considera importante llevar a la formación de profesores de matemáticas prácticas formativas, en las cuales ellos estén inmersos en procesos de aprendizaje; ya que, como lo propone Brousseau (1998), los obstáculos cognitivos de origen didáctico asocian el sistema de enseñanza en el que se encuentra el estudiante, y se localizan en las decisiones y acciones del profesor.

Por tanto, es importante que el futuro profesor de matemáticas pueda reconocer los posibles escenarios presentes en los procesos de aprendizaje que hacen los estudiantes durante el estudio de algún objeto o concepto matemático, no solo desde lo teórico, sino también desde lo práctico, por lo que la esencia de la actividad propuesta aboga por que el aprendizaje sea, tal como lo reportan Moreno et ál. (1998), un proceso constructivo y dinámico, en el que el estudiante construya su propio conocimiento matemático a través de un rol activo durante los procesos de exploración, generalización, formulación, justificación, demostración, entre otros; dependiendo de los requerimientos propios del nivel de educación en el que él se encuentre.

En paralelo, se hace necesario estipular que el formador del futuro profesor tiene un lugar preponderante en el escenario de enseñanza-aprendizaje, puesto que asume el rol de mediador entre los estudiantes y el conocimiento matemático, y debe garantizar los elementos necesarios para "promover la actividad cognitiva a partir del conocimiento responsable de los objetos de estudio y a la vez fomentar la interacción con sus alumnos, sin descuidar el bagaje de experiencias que, con relación al conocimiento matemático, ellos ya poseen" (Luque et ál., 2002, p. 6). Adicionalmente, se reconoce que los estudiantes de carreras asociadas al campo de las Matemáticas

> tienen limitaciones en la construcción, expresión y comunicación de ideas matemáticas debido a la falta de actividades matemáticas que desarrollen procesos de creación, discusión, proposición de algoritmos, manejo de teorías, formulación de conjeturas, formulación y demostración de teoremas y, en general, actividades características del trabajo matemático, que son muy escasas en la educación básica y media. (Luque et ál., 2002, p. 1)

Por lo que es importante propiciar dichos ambientes en la formación de profesores de Matemáticas, con el fin de: por un lado, mitigar tales limitaciones; y, por el otro, que tengan "herramientas" para la concreción de procesos de enseñanza de las matemáticas y reconozcan su relación biunívoca con los procesos de aprendizaje.

> Tales contribuciones y sus respectivas reconstrucciones para la educación en matemáticas traen consigo serios cuestionamientos al tratamiento y valoración con que la enseñanza de las matemáticas ha manejado los errores y las dificultades. Respecto al tratamiento, este no puede ser asumido ni por *explicaciones cada vez más claras y precisas* ni tampoco, por la ejercitación repetitiva y tediosa. Muy al contrario, lo que se precisa es de *rupturar* la satisfacción de un conocimiento que ha servido para solucionar ciertas situaciones, por tanto, es a través de la construcción de actividades de aprendizaje novedosas y cuestionadoras, por las que se logra tal ruptura. (García et ál., 1999, p. 6)

En razón de estas consideraciones, la línea de trabajo se centra en estudiar desde la práctica los procesos de aprendizaje en matemáticas a nivel escolar en el marco de formación de profesores de matemáticas. Este dominio, se aborda desde una orientación múltiple; en primer lugar, estudia las nociones, conceptos y procedimientos que constituyen el estudio de las matemáticas, particularmente, el de las funciones afines y su representación gráfica, a modo de ejemplo; en segundo lugar, permite reflexionar desde/para la *praxis* sobre los procesos cognitivos inmersos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas; y en tercer lugar, reconoce y aboga por el campo de la formación de profesores como campo de acción, investigación e innovación.

Ahora bien, la actividad propuesta es planeada para ser estudiada en el aula de clase prevaleciendo la actividad matemática de los estudiantes, en un ambiente que les permita "construir conocimientos matemáticos, desde lo que conocen, y evidenciar la necesidad de crear, descubrir y, tal vez, chocar con algunas ideas preconcebidas" (Luque et ál., 2005, p. II). Esto, implica que la actividad al ser desarrollada, "fundamentada en preguntas, respuestas, contra-preguntas y reformulación de respuestas en una construcción colectiva donde el profesor y los estudiantes cuestionan, argumentan, ejemplifican, proponen contraejemplos, establecen acuerdos, generalizan, abstraen y, en general, se simula un ambiente científico" (Luque et ál., 2005, p. II). La presentación de las discusiones en torno con la actividad del presente estudio no necesariamente es la misma de la de la clase; sin embargo, el "espíritu" es producto de esta interacción.

Metodología

Con el fin de hacer un llamado de atención, frente a la postura de considerar que "el estudio de las formas de representación no debería presentar alguna dificultad", surge la idea de mostrar al futuro profesor de matemáticas que, dependiendo del nivel de abstracción y conocimiento en el contexto de los procesos cognitivos matemáticos del estudiante, se encuentra algún tipo de dificultad. Por eso, la actividad presente en esta propuesta implica que mediante el estudio de funciones afines (tema conocido por los estudiantes para profesor de matemáticas) en el sistema de representación PAR (tema desconocido para los futuros profesores de matemáticas), los educadores se encuentren en el papel de educandos y se logre reflexionar respecto a lo que realmente enmarca una dificultad en el estudio de las matemáticas.

La estrategia para el diseño de la actividad tiene la necesidad de ser y mostrar ambientes académicos en la que el estudiante este condicionado a "crear" conocimiento matemático. Esto, parte de una re-conceptualización sobre las matemáticas que se deben enseñar en el campo de formación de profesores de matemáticas; puesto que, el principio que sustenta la propuesta es que por medio de experiencias significativas se puede simular la actividad de "hacer matemáticas" y se re-descubren elementos propios de las matemáticas a enseñar. De esta manera, y en respuesta a lo que propone Rodríguez (2016), el aprendizaje se concibe como una actividad social en la que el estudiante debe ser un sujeto activo, y no como un conjunto de conocimientos que se adquieren a partir de la transmisión de saberes; ya que, la comprensión de objetos matemáticos se da a través de la experiencia y las interacciones inmersas en esta.

Se prevé que la actividad propuesta está orientada a que lo estudiantes, futuros profesores de matemáticas, tomen conciencia de los elementos implícitos que hacen parte de los procesos de aprendizaje en el aula de matemáticas. La forma en que se presenta la actividad responde a los planteamientos propuestos en los estándares básicos de competencias del Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006), en razón a que los procesos de enseñanza de las matemáticas deben ir de lo intuitivo a lo abstracto, y de lo particular a lo general.

Antes de explicitar la actividad, se debe recordar que el contexto para el que se propone es en el marco de la formación de profesores de matemáticas, no de matemáticos; lo cual no obsta para que en este sea posible realizar una actividad matemática genuina. En efecto, las condiciones de la actividad, y, en esencia, la novedad del sistema de representación enfrenta a los estudiantes a una situación que exige y promueve el "hacer matemáticas", no solo el reconstruir algún conocimiento matemático aprendido o manejado con anterioridad en su etapa escolar.

Ahora bien, la actividad propuesta implica que los futuros docentes grafiquen funciones en el plano PAR. Para ello, la tarea inicial consiste en que el estudiante explore la representación gráfica de funciones afines; de tal suerte que, posteriormente, a partir de su expresión algebraica, se pueda predecir aproximadamente la representación gráfica de una función particular; y la tarea final es que se ge-

Nº 50 • Segundo semestre de 2021 • pp. 203- 220
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web
TED

neralice el modo de graficar cualquier función afín a partir de su representación algebraica sin la necesidad de tabular cada una que se vaya a estudiar. Nótese, que antes de proponer la tarea inicial, se debe garantizar que los estudiantes grafiquen coordenadas P (x, y) en el sistema de representación a utilizar.

Una de las estrategias posibles para abordar la tarea inicial contempla la elaboración de gráficas de funciones definidas por la expresión $y=mx+b$ con $m\neq 0$ para valores específicos de los parámetros m y b, a partir de lo cual se pueden ir elaborando, validando o refutando, conjeturas sobre casos particulares. Así, por ejemplo, al analizar el caso cuando $m=1$, se observa que la representación es un conjunto de infinitas rectas paralelas y cuando $m\neq 1$ es un "haz" de infinitas rectas; para este segundo caso, el punto de intersección de las rectas puede interpretarse y ser asumido como la representación gráfica de la función. Es importante recordar que debe ser el estudiante quien elija la estrategia de trabajo, y el formador debe ser capaz de cuestionar constantemente al estudiante en pro de que él avance en su proceso de aprendizaje y en el abordaje de la tarea propuesta.

Para mostrar un posible camino en el que la última sentencia sea veraz, proponga graficar la función lineal $y=-x$ construyendo *todas* las rectas que hacen válida la igualdad de la ecuación que determina la función e indague sobre ¿qué se puede visualizar?, ¿cuáles conjeturas se pueden determinar bajo esta construcción?, ¿qué se considerará como la representación gráfica de la función? La primera impresión que aparece como sugerencia para responder a los anteriores cuestionamientos es que una función afín tiene infinitos puntos que la hacen valedera; de este modo, si se construyeran *todas* las rectas (infinitas), la representación de la función sería todo el plano, y, por ende, sea la función $y=-x$ o cualquier otra función afín, va a ser siempre todo el plano PAR.

Para continuar con el "espíritu" y los propósitos de la actividad matemática, es importante reflexionar sobre el por qué los estudiantes pueden llegar a "trivializar" la solución de la tarea inicialmente planteada y cómo re-vivir el interés en ella. Para esto, cuestione si efectivamente la obtención del plano PAR al construir *todas* las rectas debe ser la representación o si hay algún elemento característico que pueda asumirse como la representación de una función específica. En este sentido, al analizar la construcción de la representación gráfica de la función $y=-x$ (Figura 3), dada la imposibilidad de trazar infinitas rectas, se puede visualizar que en lo finitamente-infinito de la construcción existe un punto en común (intersección de las rectas); es en este momento donde se pone a discusión y se acepta que ese punto va a ser la representación gráfica de la función.

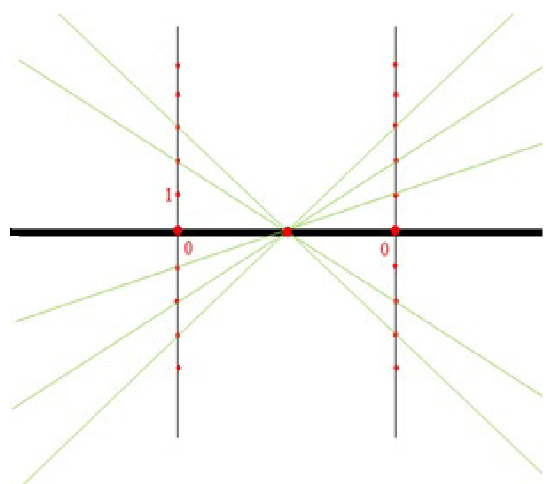

Figura 3. Construcción de la representación de $y=-x$

Fuente: elaboración propia.

Ahora, y después de aceptar tal objeto como la representación, se puede hacer el siguiente interrogante: ¿Para toda función afín va a existir un punto de intersección determinado por todas las rectas correspondientes a la función que se esté graficando? Si la respuesta inmediata es sí, proponga graficar la función $y=x$ (Figura 4). En cambio, si la respuesta es no, cuestione sobre los casos en los que no ocurre y el porqué; nótese que el único caso en el que no existe "ese" punto de intersección es cuando el parámetro m toma el valor de uno, lo que posibilita seguir estudiando en el sistema de representación PAR las demás funciones, las cuales son infinitas al abordar la función afín $y=mx+b$ en $\mathcal{R}$, con $m\neq1$. Esto implica organizar la exploración posiblemente por casos.

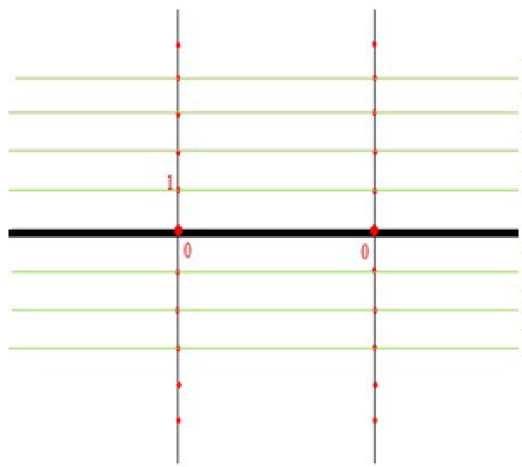

Figura 4. Construcción de la representación de $y=x$

Fuente: elaboración propia.

En atención a lo mencionado previamente, a continuación, se presentarán posibles casos en relación con los parámetros y lo que implican para la representación de una función en el plano PAR (Figura 5); es importante mencionar que esta configuración no es la única posible, depende de las discusiones producidas por/entre los estudiantes en relación con las conjeturas y generalizaciones que vayan surgiendo en el aula de clase. A su vez, el formador debe ir moderando las discusiones en pro de que los estudiantes no solo aborden la tarea inicial, sino que además lleguen a la consecución de la tarea final (no conocida por los estudiantes); esto último, con la intención de generar gusto e interés por el estudio de las matemáticas en los estudiantes, bajo el pensamiento de que pueden ir más allá de lo que el profesor, aparentemente, tiene planeado.

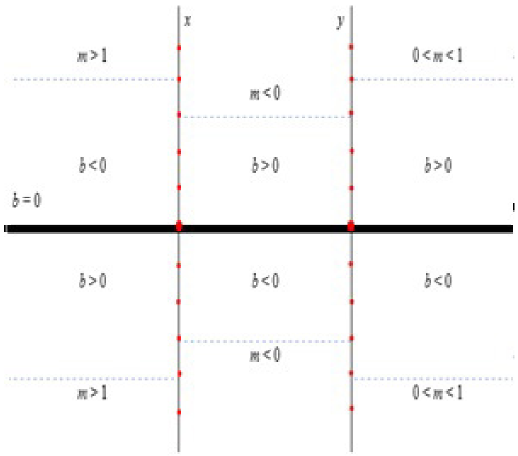

Figura 5. Ubicación del punto que representa a $y=mx+b$, según los valores de m y b

Fuente: elaboración propia.

Con la intención de facilitar la comprensión, lectura, y escritura de los elementos matemáticos que se presentarán a continuación, se incorporan algunos elementos auxiliares en el plano PAR (Figura 6), tales que: el punto C es punto medio del segmento BE; las rectas m, n, y p son paralelas a los ejes; y los segmentos AB, BE y EF son congruentes. Tenga en cuenta que esto no hace parte, necesariamente, del trabajo a realizar durante el desarrollo de la actividad; solo se incorpora para no perder de vista el asunto central de interés, por prestar atención a los elementos matemáticos a versar.

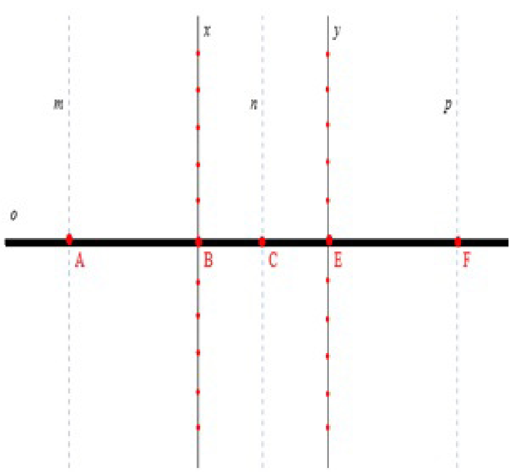

Figura 6. Elementos auxiliares en el plano PAR

Fuente: elaboración propia.

Dado que de momento se ha mantenido el parámetro $b=0$ y ya se han abordado las funciones cuando $m=\pm 1$, se puede cuestionar sobre los casos en que $m>1$, $m<-1$, y $-1<m<1$ ($-1<m<0$, $0<m<1$). Este último caso es interesante ya que, por lo general, los estudiantes tienden a emplear solo número enteros y aquí se hace obligatorio "ampliarse" al conjunto numérico de partida $\mathcal{R}$. En este momento de discusión, es muy posible que los estudiantes utilicen números racionales (en su representación decimal o fraccionaria), lo que permite al profesor cuestionar sobre la "mejor" representación numérica a utilizar e incitar a revisar ejemplos con números irracionales.

Ahora bien, después de la socialización de los posibles ejemplos que tengan los estudiantes de funciones lineales, se pueden discutir unas primeras conjeturas, las cuales mostrarán diferentes niveles de generalización y "exactitud" en torno a la ubicación aproximada del punto de representación de la función $y=mx$, tales como: (1) como $b=0$, entonces el punto que representa la función $y=mx+b$ pertenece a la recta o; (2) si $m>1$, entonces el punto se localiza en la semirrecta BA; (3) si $0<m<1$, entonces el punto se ubica en la semirrecta EF; (4) si $m<0$, entonces el punto hace parte del segmento BE; (5) si $m<-1$, entonces el punto se ubica en el segmento BC; (6) si $-1<m<0$, entonces el punto que representa a la función está en el segmento CE; (7) si $0<m<1/2$, entonces el punto se ubica en el segmento EF; y (8) si $m>2$, entonces el punto que representa a $y=mx$ hace parte del segmento AB. Adicional a esto, observe que el punto C representa la función lineal $y=-x$, el punto A es la función $y=2x$, y el punto F representa a la función $y=x/2$.

Al avanzar en la exploración bajo la condición de que $b\neq 0$ y manteniendo el parámetro m fijo, con $m=\pm 1$, pueden surgir las siguientes conjeturas: dada la función $y=x+b$, entonces no existe un punto representativo; si

m=–1, entonces el punto que representa la función y=–x+b está en la recta n; dada la función y=–x+b, entonces el punto de intersección entre la recta n y la coordenada $P_1(b/2,b/2)$ es la representación de la función; y si m=1, entonces las rectas que determinan la función son paralelas a la coordenada $P_2(0,b)$. En este momento, se puede empezar a argumentar y justificar sobre el por qué la representación de una función dada de la forma y=x+b en el plano PAR es el conjunto de infinitas rectas paralelas y que, además, es el único caso en el que no hay un punto de intersección como característica representativa.

Es de precisar que el lenguaje utilizado puede variar. Esto depende del dominio que tengan los estudiantes de este, lo que implica que el formador tiene que ser capaz de utilizar, a favor de la construcción de conjeturas, los aportes que realicen los estudiantes a la discusión. Esto permite al profesor aprovechar el proceso de comunicación inmerso en la actividad para trabajar en paralelo la apropiación de lenguaje matemático.

Al continuar con la exploración, tal que los parámetros m y b sean móviles (m, $b \in \mathcal{R}$) en la función afín y=mx+b, se obtiene que: si $0<m<1$, entonces el punto representativo se ubica en el semiplano derecho determinado por el eje y; si $m>1$, entonces el punto que representa a la función se ubica en el semiplano izquierdo determinado por el eje x; si $m<0$, entonces el punto que representa la función y=mx+b, con $b \neq 0$, se ubica en los sextantes II o V; si $b<0$, entonces el punto se ubica en los sextantes III, V, o VI; y si $b>0$, entonces el punto representativo de la función afín se localiza en los sextantes I, II, o IV.

Con las anteriores conclusiones de la exploración realizada conforme a la actividad propuesta, se acopian las conjeturas presentadas previamente para establecer la ubicación "aproximada" del punto representativo de una función afín en el plano PAR (Figura 7); lo que, a su vez, corresponde al abordaje y solución de la tarea inicial en mención.

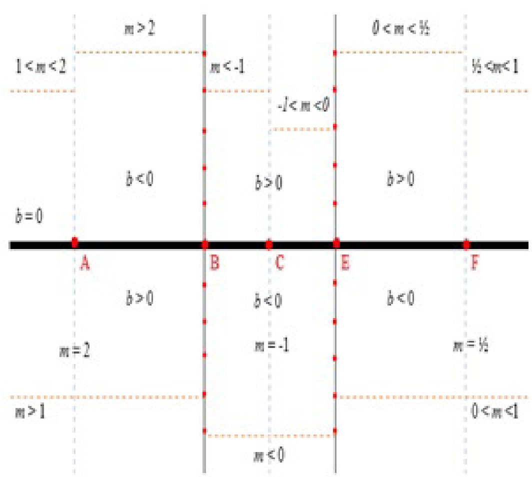

Figura 7. Ubicación del punto que representa a y=mx+b, según las conjeturas reportadas previamente

Fuente: elaboración propia

Para concluir con la presentación de las posibles interacciones en el aula de matemáticas sobre la actividad, se deja como ejercicio al lector comprobar que la respuesta de la tarea final implica que el punto que representa a la función afín $y=mx+b$, con $m\neq 1$ en el plano PAR, es el punto de coordenadas $R(-d/(m-1),-b/(m-1))$ del plano cartesiano determinado por las rectas *o* y *x* del plano PAR (Figura 8); e imaginar todos los posibles caminos a discutir en el aula de clase en torno a dicha tarea. Es importante, ir discutiendo con los estudiantes y hacer que ellos reflexionen continuamente, sobre los procesos de aprendizaje que se van realizando, las sensaciones e implicaciones que ello conlleva, y fundamentalmente el cómo y por qué tendrán en cuenta tales procesos a futuro para la creación de sus propuestas de enseñanza a nivel escolar.

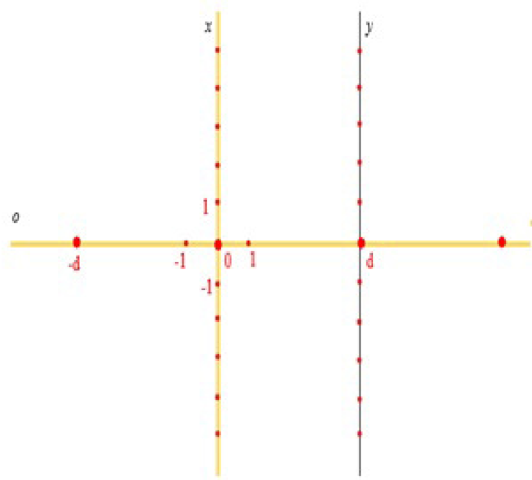

Figura 8. Construcción del plano cartesiano determinado por la recta *x* y *o* en el plano PAR

Fuente: elaboración propia.

Los elementos presentados en el siguiente apartado, atienden las observaciones llevadas a cabo, no solo durante la construcción y desarrollo de la actividad, y la selección del marco teórico y el contexto pertinente para la misma; sino que, además, recapitulan las discusiones propiciadas durante las propuestas que motivaron este artículo, presentadas en los eventos académicos mencionados como antecedentes del presente estudio y organizados por la Universidad Popular del Cesar, la Universidad Industrial de Santander y la Sociedad Colombiana de Matemáticas, y la Universidad Pedagógica Nacional, respectivamente. Tales asuntos procuran estar en relación con: los procesos y procedimientos que constituyen el estudio de las matemáticas, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares, la formación de profesores de matemáticas como campo de acción, y el aula de matemáticas como un lugar legitimo para hacer actividad matemática.

Análisis y resultados

En la actividad presentada, se requiere que el estudiante tenga varios conceptos y procedimientos previos relacionados con la solución de ecuaciones y su respectiva graficación por tabulación, que le permitan iniciar con éxito la búsqueda de una solución. En paralelo, otro elemento protagónico, para el desarrollo de la actividad, corresponde a las "traslaciones" entre las diferentes representaciones de una función, lo que implica dominar o re-estudiar el contenido matemático a enseñar en su futuro quehacer docente.

Los resultados matemáticos obtenidos con el desarrollo de la actividad ofrecen un nuevo panorama para repensar o reconstruir el conocimiento matemático respecto a ciertos conceptos u objetos matemáticos. Se hace evidente, que la asociación "natural" de las funciones afines con las rectas se vea resquebrajada con una actividad que tan solo modifica una condición para el sistema de representación gráfico; concebir un punto como representación de una función afín, definitivamente dinamiza y reta al pensamiento matemático del futuro profesor de matemáticas. Tal reto, se puede acrecentar al preguntar por la representación gráfica en el plano PAR de otras funciones, modificando alguna(s) condición(es) del sistema de representación PAR, o incluyendo como tarea el programar en algún software de geometría dinámica una "animación" que genere la gráfica de cualquier función al insertar su respectiva representación algebraica.

En correspondencia, nótese que se puede utilizar la exploración realizada bajo la condición de que $b=0$ para generar discusiones en torno a otros objetos matemáticos, tales como: la noción de cardinalidad a través del estudio de las conjeturas (5)-(6), o (7)-(8); el concepto de infinitesimal a partir de una construcción iterativa de segmentos congruentes a BE; la noción de límite al analizar el cambio de posición abrupto del punto representativo cuando $m \to 1$; el concepto de función al discutir sobre el por qué los puntos B y E no representan a alguna función afín. Sin embargo, no se sugiere fomentar durante la actividad propuesta tales discusiones, aunque puede ser utilizada posteriormente, si hay un interés de índole matemático por abordar tales conceptos desde una actividad didáctico-matemática como está.

Por su parte, la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos, procesos y procedimientos inherentes al plano cartesiano generan muchas dificultades en profesores y estudiantes. Debido a que la enseñanza de las matemáticas, específicamente las posibles dificultades que están inmersas, no solo proceden de las capacidades intelectuales de los estudiantes, sino también del ámbito escolar y no escolar los cuales hacen parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, así como de la propia constitución y comprensión de los objetos matemáticos.

En relación con los estudios sobre los procesos cognitivos que tienen los estudiantes en los procesos de aprendizaje de objetos matemáticos, se coincide que son precisamente los procedimientos, métodos y técnicas, conceptos y procesos, los que median la comprensión de tales objetos. Por tanto, es necesario que los profesores en los procesos de enseñanza tengan en cuenta tales elementos; por lo que, a su vez, es fundamental que una de las necesidades en la formación de profesores sea integrar la construcción de las estructuras conceptuales propias del campo matemático a nivel educativo, y se vivencie la importancia de fomentar actitudes y aptitudes positivas en el aula escolar de matemáticas.

Tal como lo plantean los van Hiele, según Crowley (1990), se tiene la necesidad de que los profesores tengan en cuenta la capacidad de razonar de sus estudiantes al momento de planear sus clases. Esto se debe a que no es posible enseñar a razonar de determinada forma, puesto que solo se aprende a razonar desde la propia experiencia; por tanto, es el profesor quien debe generar ambientes de aprendizaje en el aula, para que los estudiantes adquieran la experiencia necesaria para que logren razonar desde la perspectiva que se tenga contemplada.

Es necesario que el aula de matemáticas sea un ambiente de aprendizaje en el que el estudiante sea un agente activo en la construcción de su propio conocimiento; y las tareas de exploración como la presentada aquí, contribuyen a ello. Debido a que promueven en el estudiante, futuro profesor, la concepción de que las Matemáticas no son un producto sino un proceso, lo cual implica razonar matemáticamente. Además, tales procesos de aprendizaje promueven en los futuros profesores la necesidad de pensar críticamente posibles ambientes de enseñanza que permitan a sus estudiantes razonar matemáticamente y utilizar a las matemáticas para enfrentar situaciones-problema, y no solo a "repetir" respuestas y memorizar información.

De ahí, es importante y enriquecedor para el futuro profesor de matemáticas, que reconozca que "hacer matemáticas", enseñarlas o estudiarlas, no implica comunicar y familiarizarse con los conocimientos matemáticos de forma secuencial y rigurosa, como lo muestran los libros; sino que está provisto de: intentos fallidos, innumerables acercamientos desde ejemplos y contraejemplos antes de llegar al concepto, la necesidad de tener "a la mano" varios conocimientos previos (no necesariamente de forma memorística), discusiones sobre la validación o no de alguna conjetura, y otros actos que son parte del proceso de construcción de conocimiento matemático. Es decir, razonar matemáticamente, no es más que un caso particular del razonamiento general para resolver situaciones-problema.

En términos generales, estos desencuentros entre las concepciones de los futuros profesores de matemáticas, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel escolar, al tiempo que las propuestas curriculares actuales para la formación de profesores; sustenta la necesidad de proponer actividades como la referida en el presente artículo en la formación de profesores de matemáticas, con el fin de que los futuros profesores puedan gestionar, con conocimiento didáctico y matemático, y con actitud comprometida y reflexiva, propuestas educativas e innovaciones curriculares en las que se incorporen asuntos pedagógicos, didácticos y disciplinares a favor del aprendizaje de las matemáticas; y generar ambientes de aprendizaje que propendan por la conformación de comunidades en el aula, en los que se realiza el quehacer propio de las matemáticas (conjeturar, argumentar, generalizar, justificar, entre otros).

Conclusiones

En principio, es de señalar que el apartado sobre la presentación del sistema de representación PAR, debería ocupar un lugar preponderante en el presente trabajo por cuanto es el escenario didáctico-matemático que originó la construcción de la actividad matemática propuesta, ya que permite situar a los estudiantes en una situación nueva, desde la perspectiva matemática; a su vez, exige afianzar conocimientos matemáticos previamente adquiridos.

En otro sentido, se considera necesario que la formación matemática de los futuros profesores sea re-pensada, por la posibilidad de una reflexión profunda sobre asuntos como el cuestionamiento de cuáles matemáticas deben ser parte de las propuestas curriculares para la formación de profesores de matemáticas, con qué fin, y cómo deben ser incorporadas y abordadas; entre otros tantos posibles interrogantes, asumiendo el contexto de formación de profesores de matemáticas como campo de acción, investigación e innovación.

Adicionalmente, tal como lo versan los diversos autores citados y otros del campo de la Educación Matemática, la enseñanza de objetos matemáticos a nivel escolar no comienza, paradójicamente, en los procesos de enseñanza propios del profesor, sino que parten de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, los cuales están mediados por los diversos ambientes en los que están inmersos los estudiantes en su vida cotidiana y escolar. Por tales razones, es necesario abogar por la construcción de actividades matemáticas que además de sustentarse sobre el conocimiento matemático se integren en el marco de las condiciones en que se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Así pues, la actividad matemática propuesta, a modo de ejemplo, bajo el contexto de formación de profesores de matemáticas, proporciona elementos de orden pedagógico, didáctico y matemático; ya que lleva al estudiante que resuelve el problema a tener la sensación de ser un "inventor" y desarrollar el gusto por las matemáticas; gusto que, en el futuro, se espera que genere en sus estudiantes a nivel escolar.

So pena de parecer una afirmación especulativa por la ausencia de evidencias discursivas a modo de comparación entre el contexto de formación universitaria y el de educación escolar, que la actividad propuesta efectivamente pone al futuro profesor de matemáticas en una situación similar a la del estudiante de educación básica o media; cuando aborda por primera vez la temática de representación de funciones en el plano cartesiano o cuando el profesor le inquiere por una caracterización de la gráfica de una función específica. Es claro que para que el estudiante conteste "eficientemente" al profesor, debe previamente haber estudiado la relación existente entre la representación gráfica y los valores de los parámetros de la representación algebraica.

Finalmente, este artículo, tiene varias maneras de leerse; puede hacerse una lectura ligera para identificar posibles respuestas sobre cuáles matemáticas deben ser parte de la formación de profesores de matemáticas y con qué fin, se puede profundizar en la actividad propuesta a nivel matemático o didáctico, o puede tomarse como motivo de reflexión sobre el que hacer docente a través de los diferentes niveles de educación y formación profesional. Se invita a la comunidad de formadores de profesores a incluir y diseñar actividades como la presentada previamente, en la formación de futuros profesores de matemáticas para los niveles de educación básica y media.

Referencias

Brousseau, G. (1998). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*. En G. Brousseau (Ed.). *Théorie des situations didactiques* (pp. 115-160). Grenoble La Pensée Sauvage.

Crowley, M. (1990). Criterion-referenced reliability indices associated with the van Hiele geometry test. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 238-241. https://doi.org/10.2307/749377

El Bouazzaoui, H. (1996). *Conceptions des éléves et des professeurs á propos de la notion de continuité d'une fonction* PHD. Université de Bordeaux.

García, G., Serrano, C. y Díaz, H. (1999). ¿Qué hay detrás de las dificultades que presenta la comprensión del concepto de número real? *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (5), 3-16. https://doi.org/10.17227/ted.num5-5676

Guacaneme, E. y Morales, N. (2011). *¿Puede la gráfica de una función afín ser un punto y la gráfica de una función cuadrática ser una recta?* Documento presentado en el XVIII Congreso Colombiano de Matemáticas, Bucaramanga, Colombia.

Luque, C., Mora, L. y Páez, J. (2002). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e inducir.* Universidad Pedagógica Nacional.

Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2005). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Clasificar, medir e invertir*. Universidad Pedagógica Nacional.

Ministerio de Educación Nacional, Colombia, MEN. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Autor.

Ministerio de Educación Nacional, Colombia, MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Autor.

Moreno, L. y Waldegg, G. (1998). La epistemología constructivista y la didáctica de las ciencias: ¿coincidencia o complementariedad? *Enseñanza de las ciencias, 16*(3), 421-429.

Nachmias, R. y Arcavi, A. (1990). A Parallel Representation of Linear Functions Using a Microcomputer-Based Environment. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 9*(4), 79-88.

Rodríguez, M. E. (2016). La función social de la enseñanza de la matemática desde la matemática-cotidianidad- y pedagogía integral. *Revista Eleuthera, 15*, 34-45. https://doi.org/10.17151/eleu.2016.15.3

Samper, C. (1999). Sugerencias para el desarrollo de habilidades en la resolución de problemas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, 5*, 56-77.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2001). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo.* International Thomson Editores.

Forma de citar este artículo

Morales, N. (2021) Sistemas de representación no-usuales en la formación de profesores como estrategia para comprender los procesos de aprendizaje de objetos matemáticos. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (50), 203 - 220. https://doi.org/10.17227/ted.num50-12321 .