



Un enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas

- A Didactic Approach of the Ethnomathematics Program
- Uma abordagem didática do Programa Etnomatemáticas

Resumen

El enfoque didáctico del Programa Etnomatemáticas que proponemos es el resultado de 8 años de investigación con maestros en formación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Atlántico, Colombia, mediante la asesoría y participación de Trabajos de Grado. El enfoque didáctico tiene dos momentos: *la fase etnográfica* y la fase de problematización de los resultados de la fase etnográfica en ambientes escolares, que podemos resumir como la *fase educativa*. Ambas fases implican un año de investigación: la fase etnográfica es el análisis de la Etnomatemáticas en una práctica o actividad, que por general es artesanal. La fase educativa tiene como base la enseñanza paralela y comparativa entre la matemática artesanal y la matemática escolar. El objetivo principal es presentar una propuesta didáctica del Programa Etnomatemáticas; esta propuesta muestra que es necesario soportarla como mínimo en una teoría de aprendizaje de las matemáticas y que hay que conciliar con la normatividad sobre el currículo matemático establecido por, en nuestro caso, el Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Palabras clave

didáctica; etnomatemáticas; enseñanza; aprendizaje

Abstract

The didactic approach of the Ethnomathematics Program that we propose is the result of 4 years of research with teachers in the training of the Bachelor's degree in Mathematics from the Universidad del Atlántico, Colombia, through the assessment of Degree Works. The didactic approach has two moments: the ethnographic phase and the phase of problematization of the results of the ethnographic phase in school settings, which we can summarize as the educational phase. Both phases involve a year of work: the ethnographic phase is the analysis of Ethnomathematics in practice or activity, which is generally artisanal. The educational phase is based on parallel and comparative teaching between artisan mathematics and school mathematics. The main objective is to present a didactic proposal for the Ethnomathematics Program. This proposal for the didactic approach of the Ethnomathematics Program shows that it is necessary to

Armando Aroca-Araújo*

* Profesor asociado de la Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. armandoaroca@mail.uniatlantico.edu.co. Orcid: <http://orcid.org/0000-0003-2786-4848>.



support it at least in a theory of mathematics learning and that it cannot be at odds with institutional teaching designs but rather agree with them.

Keywords

didactics; ethnomathematics; teaching; learning

Resumo

A abordagem didática do Programa de Etnomatemáticas que propomos, é o resultado de 8 anos de pesquisa com professores em formação da Licenciatura em Matemática da Universidad del Atlántico na Colômbia, por meio da orientação e participação de Trabalhos de Conclusão de Graduação. A abordagem didática tem dois momentos: a *fase etnográfica* e a fase de problematização dos resultados da fase etnográfica em contextos escolares, que podemos resumir como *fase educacional*. Ambas as fases envolvem um ano de pesquisa: a fase etnográfica é a análise da Etnomatemáticas em uma prática ou atividade, que geralmente é artesanal. A fase educacional é baseada no ensino paralelo e comparativo entre matemática artesanal e matemática escolar. O objetivo principal é apresentar uma proposta didática do Programa Etnomatemáticas; esta proposta mostra que é necessário suportá-la pelo menos em uma teoria da aprendizagem da matemática e que ela deve ser harmonizada com as normas do currículo de matemática estabelecidas, em nosso caso, pelo Ministério da Educação Nacional da Colômbia.

Palavras-chave

didática; etnomatemáticas; ensino; aprendizagem

Presentación

Si bien el objeto de estudio del programa de Etnomatemáticas se originó en la antropología, en la actualidad ha sido asumido en su mayoría por investigadores en educación matemática, sin desconocer el aporte de otros campos de investigación. Ello ha implicado que muchos de los resultados de este tipo de investigaciones sean problematizados en aulas de clases de matemáticas (véanse por ejemplo Geromel *et al.*, 2018; Martins y Mendes, 2018; Morales *et al.*, 2018; Vilca-Apaza y Sosa-Gutiérrez, 2020), o que se haya analizado la relación del programa de Etnomatemáticas y la educación matemática (véanse por ejemplo, Bishop, 1999, 2000; Blanco-Álvarez *et al.*, 2014; D’Ambrosio, 2004; Gerdes, 1996; Oliveras, M. L. 1999). De estas últimas discusiones, la evidencia científica nos muestra que el programa de Etnomatemáticas puede ser una forma de educación matemática; así, se puede interpretar como un programa de investigación de base epistemológica transdisciplinar y transcultural con implicaciones didácticas. Estas podemos verlas como una línea de investigación que produzca conocimiento sobre la validación de ambientes de aprendizajes e intervenciones en el aula de clases de matemáticas, que problematicen los resultados obtenidos en investigaciones etnomatemáticas. Este enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas debe proponer estrategias para la enseñanza de las matemáticas, cómo interactúan los alumnos con los artefactos o medios didácticos que se les propone y cuáles conocimientos matemáticos desarrollan. Un enfoque didáctico de cualquier disciplina o campo de conocimiento procura analizar cómo se puede producir el conocimiento matemático de niñas y niños en las clases. El enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas que propongo también se preocupa por el tipo de sujeto que se forma en

aulas de clases de matemáticas, sobre lo que piensa y actúa matemáticamente, sobre el conocimiento matemático que le ayuda a formarse como ser humano, capaz de aceptar como válidos otros saberes, otras formas de pensar, hacer y comunicar matemáticas que viven en su entorno sociocultural próximo o universal. Esta propuesta debe tener en cuenta como mínimo la relación clásica *alumno-saber-profesor*, que soporta componentes didácticos curriculares que le dan sentido a la relación entre objetivos, competencias, estrategias y evaluación.

Este enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas, en parte, se ha soportado teórica y metodológicamente en la línea de investigación de la educación matemática sobre el diseño de tareas. Varias de estas investigaciones las podemos ver en el libro de Watson y Ohtani (2015) que se dedica solo al tema de diseño de tareas, más el segundo capítulo del libro de D’Amore (2006) *Didáctica de la matemática*; más Radford (2008) sobre la conexión entre teorías en educación matemática. Pero también ha tenido en cuenta las políticas sobre el currículo matemático que ha dispuesto el Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

La propuesta que hemos venido desarrollando trata de responder dos interrogantes: ¿Cómo diseñamos una clase de matemáticas que tenga en cuenta un enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas? Y ¿Qué matemáticas aprenden los niños en clases de matemáticas cuando creamos un ambiente de aprendizaje desde dicho enfoque? La búsqueda de respuestas a estos dos interrogantes data de hace nueve años, cuando se creó el Semillero de Investigación Diversidad Matemática¹ en la Licenciatura en Matemáticas de

1 Un semillero de investigación es un grupo de estudiantes universitarios que están dispuestos a investigar, bajo la coordinación de un profesor investigador. En nuestro caso, el Semillero está conformado regularmente por dieciséis estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas.

la Universidad del Atlántico. En este grupo se han desarrollado más de veinte monografías como opción de trabajo de grado, de un año de duración cada una, con maestros en formación. Con el pasar del tiempo, nos dimos cuenta de que las preguntas estaban alojadas en el contexto del aula de matemáticas, pero la búsqueda de respuestas empezaría justo por fuera de él. El programa de Etnomatemáticas demanda *salir* del aula de clases para conocer lo que Skovsmose (2010) denominó el *background* de los alumnos, pero también de los maestros. Así que, si queríamos conocer y luego problematizar los resultados en aulas de clases, por medio de actividades matemáticas, obtenidos en investigaciones con artesanos o grupos sociales, laborales, artesanales, culturales, se debía organizar en dos fases: *etnográfica* y *educativa*. Por ahora, estas dos fases son las que soportan el enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas que proponemos, ambas con problemas aún por indagar o con diversas ventanas de investigación.

Una pregunta que puede emerger en estos momentos es ¿por qué el programa de Etnomatemáticas debe cubrir lo didáctico? La respuesta parece obvia, pero a la vez compleja: porque se ha generado una necesidad. Al día de hoy, quienes investigan en el programa son en su inmensa mayoría educadores matemáticos, y los resultados que obtienen en la fase etnográfica los problematizan o discuten en clases de matemáticas, en muchas ocasiones, sin saber cuáles son los problemas que emergen en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas cuando emplean este enfoque. Así es como emerge la didáctica en este asunto, como una alternativa que podría dar una solución a dicho problema.

Fase etnográfica

¿Cómo empieza una fase etnográfica? A veces, se les propone a los maestros en formación un tema de investigación, en otros casos, son ellos mismos quienes lo proponen; luego se analiza su pertinencia y viabilidad: la fase etnográfica debe realizarse en el departamento del Atlántico, por cuestiones de tiempo, manutención y transporte (cuyos costos son asumidos por nosotros mismos) pues siempre los trabajos de campo se hacen en conjunto, maestros en formación y profesor asesor. La práctica artesanal debe tener indicios de diversos procesos matemáticos y el contexto donde se realiza debe brindar garantías de seguridad a los investigadores. Existen prácticas que brindan datos que son novedosos e interesantes, pero que consideramos no son suficientes para el desarrollo de una monografía como opción de Trabajo de Grado.

En una entrevista que realicé a mis alumnos sobre la fase etnográfica, algunos grupos afirmaron que

La fase etnográfica nos permitió conocer de manera directa no solo el proceso llevado a cabo por parte de los artesanos en su práctica artesanal, la matemática inmersa en dicho proceso, sino también conocer su cultura y

estilo de vida. (N. Jaraba y R. Martínez, comunicación personal, 11 de noviembre del 2020)

Esta fase permite la recolección, organización y análisis de la información la cual será la base del proyecto de investigación, como primera etapa de un trabajo en la Etnomatemáticas. (L. Cantillo y N. Pupo, comunicación personal, 11 de noviembre del 2020)

La fase etnográfica de manera general contempla lo siguiente, no siempre en el mismo orden: el lugar donde se realiza la práctica, seguridad que brinda el contexto a los investigadores, conocimiento bibliográfico o audiovisual de la práctica, el contacto preliminar con el (los) artesano(s) o grupos sociales o culturales, elaboración de protocolos de entrevistas semiestructuradas en función de la observación participante, simulacros de entrevistas y formación básica y estrategias para el manejo de los equipos audiovisuales y diario de campo, logística y diseño del trabajo de campo, métodos e instrumentos de recolección de información, valoración de los dibujos, técnicas, narrativas, lenguajes y artefactos realizados o empleados por el o los entrevistado(s), la transcripción de la información recolectada, el análisis de la información y la reflexión del aporte al o los entrevistado(s) con este tipo de investigaciones. Cada una de las anteriores actividades se presentan de manera explícita. La fase etnográfica tiene su orientación teórica básica en D'Ambrosio (2014) y su sustento metodológico en Hernández-Sampieri *et al.* (2014) y Vasilachis de Gialdino (2006), sin desconocer el aporte de muchas otras fuentes.

Comencemos a reflexionar sobre estos momentos de la fase etnográfica. Un grupo de maestros en formación que realizó una fase etnográfica en el 2019 manifestó lo siguiente sobre el contacto con los artesanos:

Se realizó una búsqueda de posibles artesanos que nos permitieran observar su práctica artesanal, dicha búsqueda se inició indagando con nuestros conocidos, preguntando especialmente por los artesanos en los pueblos. Una vez descartada la posibilidad de conocer a alguien que conociera a otro alguien, nos trasladamos directamente al municipio de nuestro interés y en las tiendas preguntamos por alguien que llevara a cabo la práctica requerida, posteriormente llegando [sic] a la vivienda del artesano, nos presentamos y dimos a conocer la razón de nuestra visita y si era posible concretar la visita (con nuestro profesor) para realizar la observación a su práctica. (N. Muñoz, E. Pacheco y O. Patertina, comunicación personal, 11 de noviembre del 2020)

- *El lugar donde se realiza la práctica y seguridad que brinda el contexto a los investigadores.* Las investigaciones que se realizan en el programa de Etnomatemáticas implican salir del salón de clases, visitar comunidades, barrios, pueblos, veredas, caseríos, lugares remotos, etc. donde el investigador regularmente es un extraño. La sociología y la antropología nos han enseñado algunas recomendaciones para ingresar a contextos que nos son ajenos. Una de ellas es que el investigador contacte a líderes de la comunidad, a artesanos, cuando sea el caso, y socialice ante ellos sus objetivos de investigación y los posibles beneficios que traerá a la comunidad dicha investigación.
- *Conocimiento bibliográfico o audiovisual de la práctica.* Antes de hacer inmersión en el lugar de la práctica, nos damos a la tarea de conocer sea bibliográfica o audiovisualmente la

práctica que se va a estudiar. Esto trae un beneficio directo al protocolo de entrevista, permite construir categorías *a priori* y de paso se puede demostrar ante el entrevistado un grado de conocimiento de la actividad que él ejerce; a nuestro juicio, esto ayuda a construir rápidamente lazos de confianza entre entrevistador y entrevistado.

- *Elaboración de los protocolos de entrevistas semiestructuradas en función de la observación participante.* Con respecto a esta actividad, se hace una revisión previa —sea documental o audiovisual— de la práctica y de esta manera se crean categorías *a priori* para indagar. Es decir, antes de hacer trabajo de campo se indaga indirectamente por la práctica artesanal. La primera versión de las preguntas de las entrevistas es preparada por los maestros en formación, quienes luego, junto con el profesor asesor, la revisan y elaboran una segunda versión del documento. Regularmente los grupos de trabajo están conformados por dos maestros en formación y el profesor asesor. A continuación, se presenta un ejemplo del formato de este protocolo de entrevista que estamos empleando.



Grupo de Investigación Horizontes en Educación Matemática
 Línea de Investigación Programa Etnomatemática
 Semillero de Investigación Diversidad Matemática
 Licenciatura en Matemáticas
 Facultad de Ciencias de la Educación
 Universidad del Atlántico

Instrumento de recolección de datos

Confección de mascarillas de bioseguridad sujeto a pandemia COVID 19	
Fecha de la entrevista	
Hora de inicio	
Hora de finalización	
Lugar	Barranquilla-taller de costura
Entrevistados	
Labor	Modistas-Artesanas
Entrevistadores	Rafael Martínez, Nicanor Jaraba, Armando Aroca
Presentación: Se socializa con las modistas la metodología de la entrevista, exponiendo las razones de esta, se establecen acuerdos protocolarios y se concretan el cronograma del día y/o semana.	
Propósito de la visita: - Realizar un registro multimedia sobre los procesos de elaboración de las mascarillas de bioseguridad, tener mayor acercamiento con la práctica y obtener una imagen fiel del contexto y las herramientas utilizadas.	
Objetivo de la entrevista: > Recolectar información sobre los procesos y actividades matemáticas implicadas en la elaboración de mascarillas de bioseguridad en taller de confecciones. Entendiendo <u>Actividades Matemáticas</u> : Contar, medir, Localizar, Diseñar, jugar y Explicar. Planteadas por Alan J. Bishop (1999).	

Figura 1. Encabezado del protocolo de entrevista empleado en una fase etnográfica.

Fuente: tomado de Jaraba y Martínez (2021).

En el formato continúan las categorías. En el caso que muestra la figura 1, fueron las siguientes:

- Socialización con las modistas y su labor
- Adquisición de materiales, costos y transporte
- Tendido, trazado y corte de la tela
- Corte de elásticos
- Preparación de máquinas de coser
- Cerrado de bordes
- Generado o elaboración de pliegues
- Postura del bias
- Pegado de elásticos
- Empacado y venta

Como se puede notar, no hay por ejemplo una categoría que se denomine *medidas en los cortes*, pues esas expresiones o procesos que se buscan en una investigación en Etnomatemáticas, en las prácticas artesanales suelen ser transversales en los momentos de la práctica misma. En esta entrevista se generaron 78 preguntas escritas, puesto que era semiestructurada fueron más de 120 preguntas las que se desarrollaron *in situ*. Se dice que las entrevistas están en función de la observación participante porque se debe experimentar la práctica; por ejemplo, si se va a entrevistar a artesanos de las máscaras, entonces los maestros en formación y el profesor asesor deben hacer una máscara, de principio a fin, en el taller del artesano entrevistado.

- *Logística y diseño del trabajo de campo*. Desarrollados los momentos o actividades anteriores, el grupo de investigación planea el viaje y todo lo que este implica: transporte, pernoctación, viáticos, etc., que siempre han sido financiados con recursos

propios. Se revisa por última vez lo que se va a hacer en el trabajo de campo y, sobre todo, las funciones que cada uno va a desempeñar. Hacer esto implica optimización y una mayor organización del tiempo, del espacio y de los recursos.

- *Simulacros de entrevistas y formación básica y estrategias para el manejo de los equipos audiovisuales y diario de campo*. Una vez concertada la primera cita con el artesano, empezamos a hacer simulacros de entrevistas; esta actividad regularmente la hacen los maestros en formación entre sí. Después, nos dirigimos al lugar de la entrevista (cualquier lugar del departamento del Atlántico), ello puede implicar algunos días de pernoctación y varias salidas de campo. Hemos registrado hasta seis salidas de campo en una sola fase etnográfica, por ejemplo, en Muñoz *et al.* (2020).

Sobre la salida de campo, uno de los grupos Manifestó:

Una vez en el trabajo de campo tratamos de simpatizar con los artesanos para que ellos no fueran a cambiar de actitud por nuestra presencia en el lugar, y la práctica se diera de manera natural ya que es importante que ellos al llevar a cabo la práctica artesanal no finjan nada, sino que hagan lo que realmente hacen siempre. Se sigue el protocolo de entrevista haciendo registro de audio, videos y fotografías durante todo el proceso de la práctica artesanal, haciendo pausas en la grabación cuando un proceso es repetitivo, pero sin dejar de estar atentos a todo lo que sucediera. (Hernández y Salas, comunicación personal, 11 de noviembre del 2020)

Saber tomar fotografías con cámara réflex o teléfonos celulares, saber a qué tomar fotos o crear fotos (se habla incluso de *lenguaje fotográfico* [González y Claro, 2015]), saber colocar el trípode para la videocámara, saber usar la videograbadora con la mano y saber usar la grabadora son aspectos técnicos claves que nos han permitido obtener datos más orientados a expresiones o procesos matemáticos que el lenguaje escrito no alcanza a dimensionar. Cuando se sabe hacer lo anterior, son procesos que no incomodan a los artesanos en su relación cuerpo-espacio y en el desarrollo de sus actividades. Toda la información audiovisual es de extrema importancia para las investigaciones en Etnomatemáticas, así que hay que formarse para registrarla; por eso hemos estudiado a Sontag (2006), González y Claro (2015) y Barros y Barros (2015). Ante tanto material audiovisual que hemos acumulado en estos últimos años, creamos un canal en YouTube denominado *Matemáticas del Pueblo. People's Math*² donde hay varias producciones audiovisuales que reflejan metodologías de investigación en el Programa de Etnomatemáticas, sobre todo videos educativos que ayudan a procesos de enseñanza y aprendizaje en clases de matemáticas.

El siguiente fragmento de uno de los grupos del Semillero de Investigación complementa lo anterior:

Es importante no solo tomar notas, sino también el realizar las grabaciones y las fotos para captar de manera precisa los gestos, expresiones, entre otros procesos propios del artesano o la práctica artesanal. (Utria y Felizzola, comunicación personal, 11 de noviembre del 2020)

Con respecto al diario de campo, se hace énfasis en que hay que llevar una libreta de apuntes, nunca olvidar un lápiz o lapicero, para ir escribiendo aquellas reflexiones, anotaciones, ideas, dibujos, preguntas, etc. que van emergiendo a medida que se va entrevistando. Estas anotaciones son clave para luego escribir los reportes. No recomendamos hacer esto en el teléfono celular pues este está destinado para un caso de emergencia en el momento que falle la carga eléctrica o las baterías de la videograbadora.

- *Valoración de los dibujos, técnicas, artefactos, el lenguaje matemático de la práctica, el empleo de gestos, concepciones temporales y narrativas.* En la fase etnográfica de una investigación etnomatemática, además de indagar por las prácticas universales de Bishop (1999): contar, medir, diseñar, jugar, explicar y localizar; o de las acciones intelectuales de D'Ambrosio (2012): observar, comparar, clasificar, ordenar, medir, cuantificar, inferir, entre otras,³ es prudente prestar atención a algunas

2 A este canal se puede llegar directamente por medio del enlace <https://bit.ly/3BcHbzu>, hoy día es visto en más de diez países y tenemos evidencias de cómo sus videos son empleados en clases de matemáticas por profesores para enriquecer culturalmente sus clases.

3 Se debe tener cuidado para no confundir estas prácticas "universales" y las acciones intelectuales con métodos de investigación. Hemos visto cómo algunas investigaciones llegan con estos lentes puestos y comienzan a indagar, por ejemplo, cómo mide, cómo cuenta, cómo juegan, etc. Esto no debería ser así; la idea es conocer la comunidad, la práctica y al artesano. Cuando estemos conociendo la práctica notaremos cuál es la matemática que se emplea en ella.

expresiones o procesos que pueden emerger en cualquier momento y que pueden también brindar información clave. Estos son: el desarrollo de dibujos, el uso de técnicas, el empleo de artefactos, el lenguaje matemático de la práctica, el empleo de gestos, la vinculación de concepciones temporales y las narrativas.

- *El desarrollo de dibujos.* En diferentes fases etnográficas que hemos realizado en estos últimos ocho años, en varias ocasiones los entrevistados de forma espontánea realizan dibujos (véase por ejemplo Aroca y Álvarez, 2016b; Osorio y Hernández, 2018; Rodríguez et al., 2019; Rada y Álvarez, 2021). En otros casos se le pide que realice un dibujo, ante lo complejo que resulta comprender lo que se está indagando en el momento. Generalmente el entrevistado recurre al dibujo para que comprendamos algo que estamos

indagando o que es producto de su propia experiencia, con lo cual aún no está familiarizado el entrevistador. Se ha querido exaltar la importancia de los dibujos que a veces se producen en la fase etnográfica, porque por medio de ellos se puede obtener la validación de representaciones de la práctica artesanal o actividad, es decir, del *saber matemático comunitario*. Mostremos un caso en el que entrevistamos pescadores artesanales con cometa en Bocas de Ceniza de Barranquilla, Colombia, Rodríguez et al. (2015). En un primer dibujo se percibió un sistema de medidas en función de brazadas, pulgadas, botella, cabezal, metros y libras que se empleaba para la elaboración del aparejo de pesca. Un pescador decidió hacer un dibujo porque consideró que no íbamos a percibirlo completamente; la figura 2 muestra ese primer bosquejo.

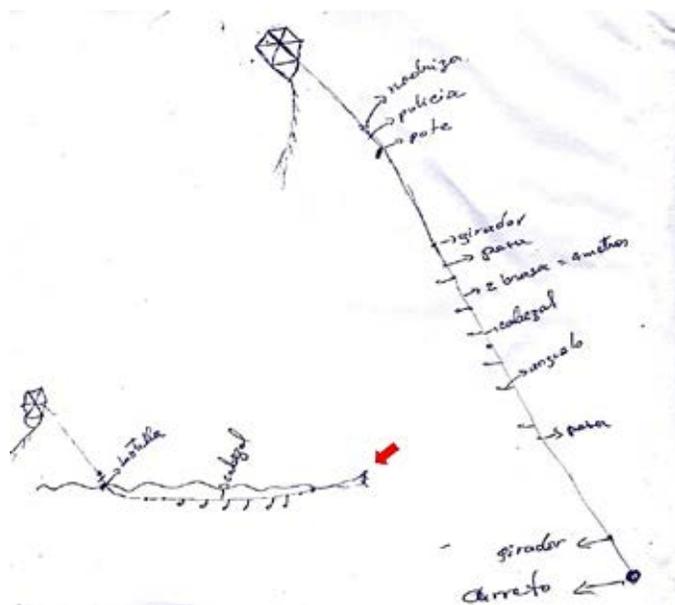


Figura 2. Representación espontánea de uno de los pescadores artesanales con cometa sobre el aparejo de pesca.

Fuente: trabajo de campo de Mosquera et al. (2015).

En la parte inferior izquierda de la figura 2, se puede notar un hombrecito (señalado con una flecha roja) que está halando la cuerda de la cometa. Al lado derecho se ve una imagen *ampliada* del aparejo de pesca. La figura 3 fue una segunda versión que hizo uno de los investigadores, Camilo, con datos de otro pescador, mientras le mostraba la figura 2.

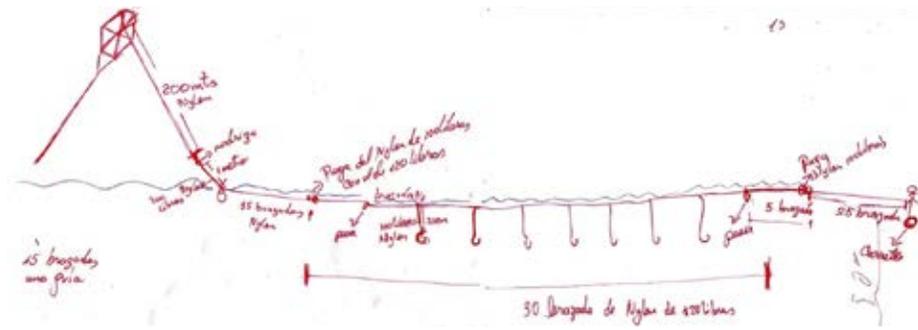


Figura 3. Segunda versión de un aparejo de pesca hecha en conjunto con otro pescador con cometa.

Fuente: trabajo de campo de Mosquera *et al.* (2015).

Posteriormente nos dimos a la tarea de hacer una tercera versión, incluyendo datos que se habían encontrado en otras entrevistas y en aportes de otros pescadores. A partir de ahí se hizo una primera versión del aparejo de pesca que se muestra a continuación.

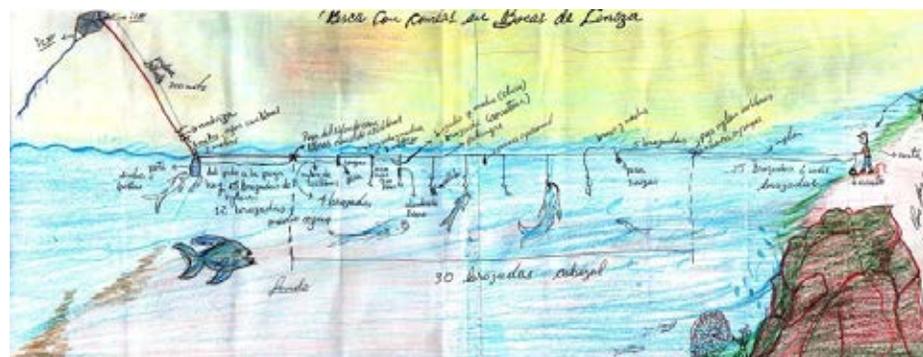


Figura 4. Tercera versión del aparejo de pesca, hecha por los investigadores.

Fuente: trabajo de campo de Mosquera *et al.* (2015).

Bajamos la tonalidad de los colores para resaltar más datos etnomatemáticos y por ello decidimos hacer una cuarta versión del aparejo de pesca. Se volvió a preguntar a algunos pescadores para que validaran cada parte de la figura, al ver que fue validada por varios pescadores, decidimos estabilizar la representación, que se muestra en la figura 5.

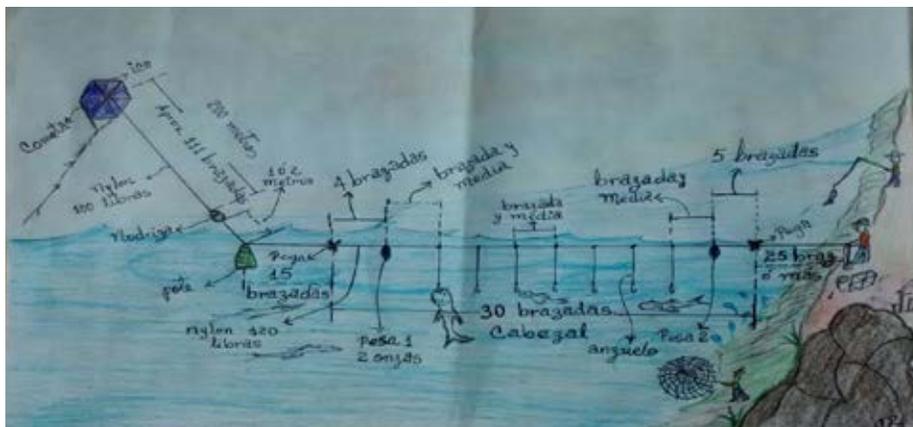


Figura 5. Representación final del aparejo de pesca validada comunitariamente por pescadores.

Fuente: Rodríguez et al. (2019).

La ventaja de poner en consideración de varios pescadores el dibujo hecho por uno de ellos, donde opera el *conocimiento matemático personal*, es que la representación final que acuerda el grupo de investigación con los pesadores representa por un lado el saber matemático comunitario, es decir, es una representación que tiene un buen grado de aceptación sobre lo que se da por compartido entre los pescadores y, por otro lado, es una representación que se puede usar confiablemente en las actividades matemáticas que se problematizan en clases. Por ejemplo, con esta última representación del aparejo de pesca, validada por un significativo número de pescadores artesanales con cometa, es decir, validado comunitariamente, se diseñaron actividades matemáticas en el aula de clases de un grado sexto del sistema educativo colombiano.

- *El uso de técnicas.* Hay una dialéctica entre las técnicas y las herramientas; en muchos casos es visible cómo las técnicas preceden a las herramientas y generan conocimiento matemático sobre lo que D'Ambrosio y Knijnik (2020) han denominado *ticas*. Las técnicas son procesos abstractos, mentales, que pertenecen a un sa-

ber matemático comunitario, pero también pueden ser exclusivas de un sujeto de la comunidad, es decir, formar parte exclusiva de un conocimiento matemático personal; a veces son el sello personal que se evidencia en el artefacto cultural. Las técnicas bien podrían estar alojadas en lo que Rosa y Orey (2017) han denominado *etnomodelaje*. Si hacemos un juego de diccionarios, la palabra técnica tiene varias acepciones, entre ellas: 'conjunto de procedimientos o recursos', 'pericia', 'destrezas', 'habilidades', 'reglas', 'normas', 'acciones' o 'protocolos'. Hay un factor común en estas acepciones y es que tienen como propósito obtener un resultado concreto y óptimo, en nuestro caso se hace empleando conocimiento matemático.

A continuación, se presenta una muestra de técnicas que hemos identificado en los últimos años de investigación con artesanos, grupos laborales o culturales. Son muchas las técnicas que se han descrito en los últimos años de investigación, y bien podría hacerse un estudio más detallado sobre ellas: ¿por qué, para qué y cómo emergen las técnicas?,

¿cuándo cambian o cuándo desaparecen y por qué?, ¿cuál es su relación con el desarrollo de conocimiento matemático?

Con artesanos de palma de iraca del municipio de Usiacurí, Atlántico, Colombia. Morales (2015), Utria y Felizzola (2020) y Santana y Álvarez (2020).

- Darle la vuelta a una botella de gaseosa, con un alambre, para obtener un anillo.
- Usar moldes dibujados en cartón o en una mesa o previamente diseñados en alambre para reproducir formas geométricas.
- El empleo de la *teoría del pi*, que permite cortar un alambre y obtener las dimensiones de un anillo preestablecido.
- Manipular el alambre con la ayuda de los dedos para obtener un anillo.
- Unir el alambre con palma de iraca en partes diferentes al vértice de la figura para un mayor agarre y firmeza de la artesanía.
- Cerrar un polígono regular hecho con alambre en el medio de uno de sus lados y no en uno de sus vértices.
- Cuando se usa soldadura, cerrar el polígono con la unión del alambre en el vértice de las figuras; si es un anillo, en cualquier punto.

Con otros artesanos, grupos laborales, sociales o culturales encontramos las siguientes técnicas:

- Todos los algoritmos mentales y sus procedimientos que emplean vendedores ambulantes, tenderos, estudiantes y profesores para el cálculo aritmético de sumas, restas, multiplicación y división (Palacios y Ramírez, 2015).
- Uso de la braza para determinar el grosor mínimo del tallo de un árbol para cortar (Aroca, 2016).
- Aumentar o disminuir la velocidad del bus de transporte público para recoger más pasajeros o para no toparse con arroyos de aguas lluvias (Hernández y Osorio, 2016).
- Grosor de una piedra-tablón con el largo de la falange superior del dedo pulgar (Aroca, 2018c).
- Organización de pilas de cinco bollos sobre la mesa para el conteo rápido de la producción de bollos de yuca (Cantillo y Pupo, 2020).
- Uso de la braza como unidad de medida para plantar yuca, plátano o maíz. Cubicar un terreno irregular para calcular su área (Álvarez y Rada, 2021).
- Repartición de los trazos cuadrados de los tapabocas sobre la tela tendida en la mesa de corte (Jaraba y Martínez, 2021).

- *El empleo de artefactos.* Diversos autores, en distintos contextos, han analizado el papel de los artefactos, que también se podrían denominar *herramientas, utensilios o instrumentos*. Este momento es de suma importancia para el enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas porque regularmente los investigadores en esta área problematizan actividades en clases de matemáticas y en estas involucran artefactos tangibles e intangibles que se emplean en prácticas artesanales o culturales de la comunidad. Así, dedicaremos algunas líneas sobre la reflexión teórica de este tema. Por ejemplo, Radford (2014) plantea lo siguiente:

De súbito nos encontramos en un mundo que nos objeta, que no es el resultado de nuestras acciones. Es un mundo que ha sido ya transformado por la labor de las generaciones que nos han precedido y que está ya impregnado de significados. Los objetos que encontramos frente a nosotros —una silla, un encendedor— llevan ya en sí la experiencia humana pasada. (p. 141)

Esa experiencia a la que hace alusión Radford es la atribuida, por ejemplo, a cualquier madero cuya superficie lisa y que tenga un contorno rectilíneo pueda ser empleado para dibujar una línea recta e interpretada como una regla. Trouche (2005a), quien tiene otra concepción diferente de Radford, considera que un instrumento es lo que el sujeto construye a partir de un artefacto. Por su parte, Montiel y Del Castillo (2009) manifiestan lo siguiente:

[...] el sujeto construye su propio instrumento, él se lo apropia, lo que hace al instrumento reutilizable en situaciones análogas. A través de esta conservación, el instrumento es una forma de capitalizar

la experiencia. En este sentido, todo instrumento es conocimiento. (p. 461)

Si miramos con más detalles el papel de los artefactos o herramientas en diversos contextos, encontramos:

- Vigotsky (1930, 1981, 1994). Los trabajos pioneros sobre la mediación de los artefactos en el aprendizaje en el aula de clases se dieron gracias a Vigotsky, principalmente en la década de 1930.
- Rabardel (1995a, 1995b, 2000). Este autor muestra la influencia profunda de los instrumentos en el aprendizaje y en didáctica de las matemáticas. Rabardel considera que los instrumentos no son entidades neutras, sino que presentan un impacto en el aprendizaje de los sujetos. En sus aportes se encuentra un referente inicial para analizar el enfoque instrumental en el campo de la didáctica de las matemáticas.
- Bartolini y Mariotti (2008) tomaron como referencia las investigaciones de Vigotsky para estudiar el papel tanto de la interacción como de los artefactos en el aula, centrándose en la mediación semiótica.
- Trouche (2005a, 2005b) muestra la relación entre instrumento y artefacto. Para él, un instrumento es lo que el sujeto construye a partir de un artefacto. Rabardel, Guin, Trouche y otros autores franceses desarrollaron la teoría de la génesis instrumental.
- Montiel y Del Castillo (2009) plantean la discusión sobre si se

trata de artefacto o instrumento. Sin embargo, al analizar los diversos autores aquí citados, se nota la tensión que hay sobre cuál término emplear y el poco acuerdo —a veces oposiciones— que hay.

- Radford (2006, 2014a, 2014b) muestra la relación de los artefactos para el aprendizaje, y en particular de las matemáticas, a partir de la teoría de la objetivación.

Los artefactos que se emplean en las prácticas artesanales no son meros objetos tangibles o simbólicos, también producen matemáticas por medio de su mediación semiótica e interacción con la práctica artesanal. También hemos podido verificar que estos mismos artefactos cumplen esta función cuando los alumnos interactúan con ellos por medio de las actividades matemáticas. Hemos visto que los artefactos se clasificarían en dos grupos: tangibles y simbólicos. En los tangibles tenemos unos que se interpretarían de forma clásica como herramientas (pinzas, cimbra, martillo, machetes, caladora, taladros, manos, instrumentos geométricos, etc.) y otros como utensilios (leña, el fogón, ollas, cabuyas, etc.). En los simbólicos se encuentran en la práctica artesanal predominantemente los dibujos, pero en las prácticas escolares un conjunto numérico podría ser un artefacto simbólico.

- *El lenguaje matemático de la práctica.* Son de destacada importancia las palabras o expresiones especializadas en matemáticas usadas por el entrevistado, porque suelen ser propias de la práctica y reflejan la diversidad de significantes y significados matemáticos, es lo que podemos denominar el lenguaje matemático de la práctica, al que de cierta forma se puede llegar por medio de la actividad que Bishop (1999; 2005) denominó *explicar*. Conocer los significantes puede ser muy fácil; por ejemplo, *cubicar la tierra*, otra cosa es conocer el significado de *cubicar*; para ello, recomendamos siempre triangular respuestas. *Cubicar* es una estrategia para calcular el área de un terreno irregular, que usan campesinos del Atlántico y Córdoba al norte de Colombia (Álvarez y Rada, 2021). El lenguaje matemático de la práctica emerge en la medida en que no tome protagonismo el lenguaje matemático profesional del entrevistador; por ejemplo, si este último comienza a interpretar lo que observa como simetrías, concavidades, perpendicularidad, etc. Regularmente hemos notado que el entrevistado comienza a usar palabras de la matemática escolar solo para expresarse de manera “familiar” a nuestra profesión de licenciados en matemáticas; en Aroca (2008b) y Aroca y Cauty (2017) se analizaron algunos obstáculos que plantea la dialéctica de lenguajes entre el entrevistado y entrevistador. Recomendamos que el entrevistador se concentre en conocer al entrevistado y su práctica o actividad, no en interpretarla *in situ*, ya que esto puede ser muy riesgoso para que emerja el lenguaje matemático de la práctica. En lugar de eso, lo que debe hacer es formular preguntas que le den protagonismo al lenguaje matemático

de la práctica. Este puede incluir sus combinaciones: verbal, ágrafo, gestual, icónico y pocas veces escrito, por ello, regularmente, la práctica o actividad no se enseña o aprende por medios escritos, sino por lo que se denomina tradición oral; se aprende del padre, de la madre, del amigo, observando o experimentando. Una muestra de palabras o expresiones del lenguaje matemático artesanal que hemos encontrado es: *brazo, braza, brazada, jemer, cuarta, dedo, paso largo, paso corto, palmo, manojo, atao, cubicar, cabuya, vara, entercie, pisca, puñao grande, puñao pequeño, manojo, lao, cimbra, caracolito, dedo, bolita, alfajor, cuadro, entrencillar, enganche, atadero, balde, tanque, coto, ponchera, palazo, etc.* Hay algunas expresiones que podrían denominarse homónimas con el lenguaje matemático escolar, por

ejemplo, en alguna comunidad artesanal *medir usando un metro cuadrado o metro lineal* significa lo mismo. Esas expresiones podrían usarse también en un contexto escolar, pero nunca con el mismo significado; en el contexto de la extracción de la piedra-tablón que se realiza en el corregimiento de los Naranjos, del municipio de Loboguerrero, del Valle del Cauca, esta expresión significa comenzar a calcular el peso de una tonelada, es decir, metro cuadrado = metro lineal. Entonces, cada metro cuadrado o lineal de laja de piedra-tablón pesa aproximadamente entre 30 y 40 kilos. La fotografía 1 muestra un metro cuadrado o lineal de laja de piedra-tablón que sirve para calcular una tonelada de dicho producto. Estas expresiones son parte de la riqueza que tienen los lenguajes matemáticos de la práctica.



Fotografía 1. Cálculo de una tonelada de lajas de piedra-tablón por medio del metro cuadrado o lineal.

Fuente: tomada de Aroca (2018c).

- *El empleo de gestos.* Si bien los gestos forman parte del lenguaje matemático de la práctica, queremos hacer una distinción sobre él, dada su importancia. En una investigación que realizamos sobre las formas de medir y estimar de albañiles (Rey y Aroca, 2011), notamos que las explicaciones orales verbales que nos daban siempre estaban acompañadas de gestos con indicaciones déicticas sobre partes de la construcción. Incluso en algunos casos una parte de la explicación era dada de forma oral y la otra gestual. Otra perspectiva se encuentra en el campo de la educación matemática, donde algunos investigadores han estudiado el papel de los gestos en el aula de clases en cuanto a la generalización de patrones (Arzarello y Edwards, 2005; Radford, 2003; 2005; Vergel, 2015). Un gesto no es pasivo y no se hace solo con los brazos y las manos; también con los ojos: abrirlos de repente o cerrarlos, el ceño medio fruncido o levemente fruncido, una inhalación profunda, el movimiento de un dedo, el amague con el tronco, entre muchas más. Así que la investigación en etnomatemáticas, en la fase etnográfica, debe prestar atención a los gestos, tratar de comprenderlos, pues un gesto puede ser una acción especializada en matemáticas. Hemos visto que existen dos macrogrupos de gestos: uno conformado por aquellos gestos que podrían dejar huella para ser analizados, por ejemplo, una gráfica hecha en el tablero o en el cuaderno, una representación fotográfica de algo, un pintura rupestre, diseños en la arena; y otro grupo de gestos que no dejan huella, pero sí una imagen en los modelos mentales del entrevistador, por ejemplo, cuando el entrevistado emplea el movimiento lineal de la mano para indicar lo horizontal, lo vertical o lo oblicuo.

Hemos tenido la oportunidad de realizar algunas investigaciones donde se demostró que los gestos eran esenciales para la comunicación; sin ellos, la práctica no tendría significado. Por ejemplo, sin los gestos es imposible que se comuniquen matemáticamente el controlador de tiempos y los conductores de buses de transporte urbano de algunas ciudades capitales de Colombia (véase por ejemplo Aroca, 2015b). De hecho, este sistema de comunicación se denominó sistema numérico-gestual para la comunicación, debido a que los involucrados en la práctica así lo denominaban. Los entrevistados hacían alusión explícita a los gestos, a los números y a la comunicación. La figura 6 muestra una parte de esos gestos especializados en matemáticas.

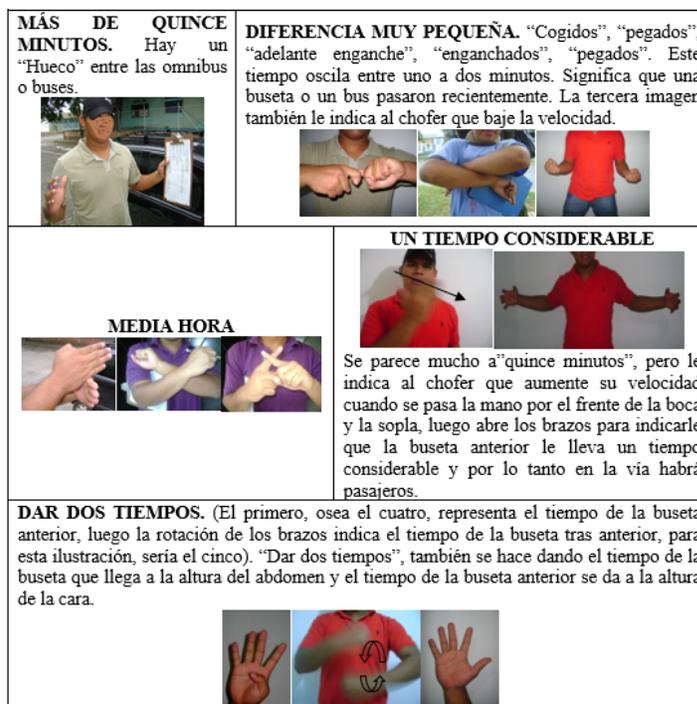


Figura 6. Representaciones gestuales del tiempo de diferencia del seis hasta el quince.

Fuente: tomado de Aroca (2015b).

- *Vinculación de concepciones temporales.* Las concepciones temporales son una rica fuente de investigación de otras formas de organizar, medir o comprender el tiempo. La misma figura 6 es un ejemplo de ello; son gestos, pero también representaciones de concepciones temporales. A pesar de que el tiempo es inseparable del espacio (Hawking y Pensore, 2015), se han dado muchas investigaciones en el programa de Etnomatemáticas sobre concepciones espaciales —o *localizar*, como lo denominó Bishop (1999, 2005)— y que dejan de lado concepciones temporales. En Hernández y Osorio (2018) se analizaron las concepciones témporo-espaciales de conductores de buses de transporte público de la ciudad de Barranquilla cuando debían enfrentar los arroyos

que se forman en la ciudad cuando llueve torrencialmente. También hemos analizado la temporalidad de los pescadores de viento y marea de Buenaventura (Aroca, 2018b). El tiempo, la temporalidad, la duración, el *crono*, son concepciones o acciones que merecen toda nuestra atención en la investigación etnomatemática.

- *Las narrativas.* Las narrativas son los procesos de escritura que los entrevistados o partícipes de la investigación —siempre y cuando puedan— realizan sobre lo que piensan, analizan, observan, etc. de la práctica artesanal, lúdica, social y cultural. Regularmente la narrativa se basa en descripciones de la experiencia que se tuvo o se ha tenido. La narrativa, por ejemplo, fue una de las estrategias que empleó Quintero (2020) con alumnos de una

institución educativa rural que conocieron trapiches y la elaboración de productos derivados del jugo de la caña, especialmente la panela. Lo que nos enseñó esta gran tesis de maestría fue que para realizar una buena narrativa se debe hacer una inmersión en la práctica social. La figura 7 muestra una secuencia metodológica que realizó Quintero para lograr las narrativas de sus alumnos.



Figura 7. Secuencia metodológica para obtener buenas narrativas de alumnos sobre una práctica laboral y artesanal.

Fuente: Quintero (2020).

Esa secuencia metodológica para obtener las narrativas de los alumnos se puede resumir así: conocer el cultivo de la caña, a los artesanos, el trapiche, las técnicas de elaboración de los productos derivados del jugo de la caña, vincular a los artesanos o campesinos a la clase de matemáticas, hacer discusiones grupales sobre lo que se escribe y reconocer el saber matemático que se ha desarrollado en la práctica artesanal.

El desarrollo de dibujos, el empleo de herramientas, el uso de técnicas, el lenguaje matemático de la práctica, el empleo de gestos, la vinculación de concepciones temporales (unidas a las concepciones espaciales) y las narrativas son procesos que también merecen ser explorados en las investigaciones etnomatemáticas. Hemos notado en algunas de ellas que los diseños metodológicos están orientados *a priori* bajo las prácticas “universales” de Bishop (1999, 2005) o las acciones intelectuales de D’Ambrosio (2012), las cuales han sido asumidas erróneamente como métodos para la recolección de información etnomatemática, eclipsando los procesos que se han descrito y otros más. Pensamos que llegar con los lentes puestos de *medir, contar, diseñar, jugar, localizar y explicar* (que son las “prácticas universales” de Bishop), o con los lentes de *observar, comparar, clasificar, ordenar, medir, inferir, cuantificar*, entre otras (que son las acciones intelectuales

de D'Ambrosio), para analizar una práctica artesanal, social, lúdica o cultural es un error metodológico. No estamos proponiendo otros lentes, nuestra recomendación es que la práctica sea quien nos guíe, pero podemos tener en cuenta lo anteriormente expuesto según los datos que emerjan.

- *Transcripción, métodos e instrumentos de recolección y análisis de la información.* Para transcribir la información se tiene en cuenta lo recomendado en diversos libros de metodología de investigación cualitativa, entre ellos Hernández-Sampieri *et al.* (2014) y Vasilachis (2006). En las transcripciones de audios o videos se usan los signos Val.Es.Co. Después de que se hace toda la transcripción, se les pide a los maestros en formación que elaboren un documento que muestre lo que ellos consideran es de tipo matemático. Regularmente esto se aprende a hacer en una electiva de nuestra Licenciatura en Matemáticas que se llama Etnomatemáticas, o en las asesorías que se les brinda a los maestros en formación. El análisis de datos es orientado por el concepto de etnografía matemática expuesto inicialmente en Aroca (2018b) y luego con más detalles en Aroca (s.f.); en algunos casos se ha usado el programa Atlas.ti8.

Una etnografía matemática tiene como base la comprensión del saber matemático comunitario y el conocimiento matemático personal del entrevistado. Esa comprensión nos lleva a analizar tres procesos metodológicos que pudimos identificar en los últimos años de investigación:

1. Las descripciones del saber matemático comunitario y del conocimiento matemático del sujeto.

2. El análisis de los significados del saber matemático comunitario y del conocimiento matemático del sujeto.
3. Los dos criterios de correspondencia en el análisis de los significados del saber matemático comunitario y del conocimiento matemático del sujeto.

Por cuestiones de extensión no es fácil resumir el concepto de etnografía matemática, por ello remitimos a la lectura de Aroca (s.f.).

- *La reflexión del aporte al (los) entrevistado(s) con este tipo de investigaciones.* En alguna ocasión un investigador nos preguntó cómo se benefician los artesanos con este tipo de investigaciones. Una respuesta a esta pregunta depende en gran medida de la profesión que ejerce el investigador, en nuestro caso, somos educadores matemáticos. Puesto que se escoge una Institución educativa contextualizada a la práctica del entrevistado, los beneficiarios son tanto el entrevistado como su comunidad, que aprende en las aulas de clases los saberes comunitarios matemáticos que su actividad ha desarrollado. La valoración de las prácticas artesanales, de los artesanos mismos, por parte de la comunidad al incluirlos en los planes de clases escolares, más la divulgación de resultados investigativos como libros, capítulos de libros, artículos, conferencias, talleres, videos, etc., es decir, la apropiación social del conocimiento también es un beneficio para los artesanos en su valoración comunitaria. Hay algo que parece un acto sencillo, simple, pero que merece ser descrito: cuando divulgamos en nuestro canal de YouTube, *Matemáticas del Pueblo. People's Math*, los videos de las entrevistas a

los artesanos podemos ver su rostro de felicidad, de reconocimiento, e incluso hemos visto cómo el enlace les ha servido de carta de presentación ante otras personas. Para finalizar una anécdota de gran orgullo sobre el impacto y beneficios de nuestras investigaciones: en el 2013 hicimos una investigación sobre curtidores artesanales de cuero de vaca y chivo, de la cual se derivó un libro. En el 2021, una familia con poder político y económico deseaba retirar de su lugar ancestral de trabajo a los curtidores artesanales que estaban al lado de un río porque consideraban que lo contaminaban. Uno de los argumentos de los curtidores fue mostrarle el libro a dicha familia, y desde entonces el conflicto terminó. La historia con más detalles se puede ver en un video de YouTube, Aroca (2021b), y el libro se puede consultar en Aroca (2013b).

Por último, presentamos tres evidencias de algunas fases etnográficas de monografías, de varias que hemos realizado.



Medidas en la extracción artesanal de carbón. Maradey (2016). Algunos resultados de la investigación (Maradey y Aroca 2015a, 2015b). Más una implementación de planes de clases en una institución educativa de Galapa, Atlántico, Colombia.



Cálculos mentales aritméticos de comerciantes informales y académicos. Palacios y Ramírez (2015). Algunos resultados de la investigación (Palacios et al. 2015a; Palacios et al. 2015b). Más una implementación de planes de clases en algunas Instituciones Educativas de Barranquilla, Atlántico, Colombia.



Medidas, estructuras y patrones en las artesanías de Usiacurí (Álvarez y Santana, 2020; Utria y Felizzola, 2020). Algunos resultados de investigación: Morales Beleño et al. (2018); Morales y Aroca (2019), más una implementación de tareas en estudios de casos (debido a la pandemia producida por la COVID-19) en Usiacurí, Atlántico, Colombia.

Figura 8. Imágenes de algunas fases etnográficas realizadas.

Fuente: fotografías propias de trabajo de campo.

Fase educativa

Hacer una fase etnográfica como mínimo durante seis meses tiene la ventaja de que el investigador puede conocer la comunidad, la práctica artesanal en muchos de sus procesos, a los artesanos mismos y obtener datos validados por la comunidad artesanal. Sobre estos datos es que se fundamenta en gran medida la fase educativa. Esta es más problemática que la etnográfica, es lo realmente nuevo para el programa de Etnomatemáticas y lo que reta constantemente con situaciones que se convierten en sublíneas de investigación. Muchos de los investigadores etnomatemáticos son educadores matemáticos, están interesados en comprender cómo se puede aportar a la dimensión educativa como propone D'Ambrosio (2006), sobre las dimensiones del programa de Etnomatemáticas, desean comprender cómo pueden contribuir estos resultados a la enseñanza de las matemáticas y el desarrollo de conocimiento matemático de los alumnos. En esta propuesta de la fase educativa del enfoque didáctico del Programa Etnomatemáticas no se pretende que los alumnos recreen las prácticas artesanales y sus significados tal como se desarrollan en su contexto; lo que se pretende es identificar las matemáticas, los conceptos y las transformaciones que ellos desarrollan al interactuar con los planes de clase. Lo que hemos denominado *fase educativa* se viene investigando en varias partes del mundo; solo como ejemplo podemos citar a Morales Beleño *et al.* (2018), quienes describieron algunas de esas investigaciones de la siguiente manera:

Martínez (2012) y Martínez *et al.* (2014), su trabajo con comunidades indígenas o su experiencia en Etnomatemáticas sustentada en el diseño y construcción del instrumento musical cuatro; Díaz & Bazán (2011) sobre la enseñanza de trans-

formaciones isométrica con estudiantes adultos, Peña (2014) sobre la inclusión de conocimientos matemáticos locales en los de currículos de matemáticas en situaciones de interculturalidad, Nop Vargas (2012), sobre una aproximación teórica para la enseñanza-aprendizaje desde la cultura Ayuujk, entre otros. (p. 122)

Otro ejemplo sería el número 2 del 2018 de la *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas*, cuya temática fue *experiencias educativas en la escuela*, que mostró experiencias de aula innovadoras para desarrollar clases de matemáticas desde un enfoque etnomatemático. De este número se pueden destacar las investigaciones de Martins y Mendes (2018), Trujillo Varilla *et al.* (2018), Guarumo (2018), Geromel *et al.* (2018) y Morales *et al.* (2018).

Según nuestra experiencia, la fase educativa demandaría como mínimo cuatro procesos, que contribuyen a crear el ambiente de aprendizaje que deseamos: 1) selección de la institución educativa, 2) selección del grado escolar y temas matemáticos, 3) vinculación del profesor titular y 4) sincronía con los procesos curriculares de la institución educativa: desarrollo de planes de clase.

Selección de la institución educativa

Se ha planteado que lo ideal es que la institución donde se llevará a cabo la fase educativa sea del mismo contexto sociocultural de la práctica artesanal que se analizó en la fase etnográfica. Esto trae consigo varios aspectos positivos que hemos verificado en diversas investigaciones que hemos realizado y es que algunos alumnos reconocen diversos procesos de la fase etnográfica y de paso participan voluntariamente mucho más en clases. Varios alumnos han manifestado que toda su familia participa de la práctica, que algunos de ellos

lo hacen o que algún amigo de la familia lo hace. No obstante, en alguna ocasión empleamos una fase educativa (Aroca, 2015a), cuya fase etnográfica (Aroca, 2013a), fue en otro contexto sociocultural muy distinto: se realizó en el sur de Colombia, en el departamento del Cauca. Allí se analizaron diversos diseños realizados en vasos y copas ceremoniales de las culturas de los pastos y quillacingas, y su fase educativa fue en el norte de Colombia, con maestros en formación de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Atlántico; lo que sucedió fue que los alumnos, en su mayoría, también estuvieron muy participes, aunque no reconocían algunos procesos de la práctica artesanal.

Selección del tema y grado escolares

Es la comprensión de la práctica artesanal lo que establece el tema y grado escolares por seleccionar y no lo contrario: que el investigador decide el tema antes de recoger la información en la fase etnográfica. Una anécdota: cuando estábamos preparándonos para conocer la pesca artesanal con cometa en Bocas de Cenizas, en Barranquilla, tres maestros en formación y yo pensábamos que se trataba de un tema de probabilidad, debido a los tipos de vientos que sirven para pescar y que se dan según ciertas condiciones climáticas. Si bien este podría ser un tema de investigación, los datos más recurrentes al momento de realizar el trabajo de campo, debido a su complejidad y la importancia que le daban los pescadores artesanales, fueron dos sistemas de medidas: un sistema de n función de dedos, jemer y cuartas, que se emplea para realizar cinco tipos de cometas según la intensidad de los vientos y que son estacionarias y un segundo sistema de medidas, en función de pulgadas, brazadas, cabezal, pote y libras (como mostró la figura 4), para construir el aparejo de pesca (Rodríguez *et al.*, 2019).

Vinculación del profesor titular

Al profesor titular de la clase se le debe vincular para que en la fase del pilotaje de los planes de clase aporte todas las observaciones que considere pertinentes tener en cuenta. Al principio solo pedíamos permiso para desarrollar los planes de clase en dos o tres semanas, pero el profesor titular se retiraba de las clases y confiaba en nosotros su desarrollo. Hoy día le pedimos que no se retire y que sea un evaluador de toda la fase educativa. Dos grandes ideales de este enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas es que los maestros en formación que aplican los planes de clases y el profesor titular continúen empleándolo en sus clases de matemáticas. Son muchas las variables que se oponen a ellos, pero aún no se han investigado.

Sincronía con los procesos curriculares de la institución educativa: Desarrollo de planes de clases (Diseño; pilotaje; matriz de aciertos, desaciertos y ajustes; implementación final; análisis de los resultados: conocimiento matemático del alumno, la evaluación), el lugar del maestro en formación de matemáticas y del profesor en la enseñanza paralela y comparativa, el gran reto nacional, otras reflexiones

El desarrollo de los planes de clase es, tal vez, la fase más compleja del enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas que estamos desarrollando. Es un campo en el cual tenemos poca experiencia, hay una desproporción enorme entre las innumerables investigaciones que reflejan fases etnográficas con respecto a las pocas investigaciones que reflejan fases educativas, pese a su crecimiento en todas partes del mundo. Así, la fase educativa del enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas es un campo problemático y fecundo de investigaciones.

Se presentan a continuación los momentos que se consideran básicos para el desarrollo de los planes de clases desde esta propuesta del enfoque didáctico del Programa Etnomatemáticas.

Diseño de planes de clase

Los planes de clase se elaboran en función de un aprendizaje por adaptación por medio de mecanismos sociales (fundamentalmente trabajo en equipo) a un mundo de prácticas culturales (Radford, 2017), que está mediado por artefactos escolares o etnográficos (productos de la fase etnográfica). Para su diseño normalmente las instituciones educativas de Colombia emplean formatos preestablecidos, por ejemplo,

guías de clase, planes de clase o unidades completas. Estos formatos emplean títulos en algunas filas y columnas que reflejan concepciones de cómo se puede enseñar, cómo se aprende y cómo se organiza una clase de matemáticas. No consideramos pertinente reñir con estos formatos, sino adaptarlos al enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas. No somos partidarios de entrar irrumpiendo, sino de conciliar procesos. Por ejemplo, para este proceso de adaptación de los formatos institucionales es clave contar con el profesor titular, dada la libertad de cátedra. El diseño de los planes de clase tiene en cuenta los datos obtenidos en la fase etnográfica y el tema o temas del currículo matemático escolar con el cual se pondrá en relación paralela y comparativa (Aroca, 2018a; 2018d). Como nuestro contexto es Colombia, se tiene en cuenta lo planteado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998) en los lineamientos curriculares; los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (MEN, 2006), los *Derechos Básicos de Aprendizaje-DBA* (MEN, 2016a), el documento de fundamentación teórica de los Derechos Básicos de Aprendizaje, volumen 2, y las *Mallas de Aprendizaje para el Área de Matemáticas* (MEN, 2016b). Lo anterior nos brinda elementos para la organización de las clases de matemáticas y para una metodología de la enseñanza. Desde este enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas, el diseño de las tareas o actividades matemáticas se guía mediante el enfoque de enseñanza paralela y comparativa, pues este tipo de enseñanza, además de crear un ambiente de aprendizaje de las matemáticas, asume una posición política: procura valorar las matemáticas que se emplean en las prácticas artesanales como representante de la cultura local, pero también de reconocer las matemáticas escolares como representantes de la cultura globalizante. Es necesario enseñar y aprender ambas dimensiones

de las matemáticas, lo que implica que la institucionalización del saber al cual hacen alusión Brosseau (1986) y Margolinas (2009) tiene cambios, pues ambos saberes matemáticos, los locales y los escolares, deben institucionalizarse.

Uno de los ideales en el enfoque de enseñanza paralela y comparativa es que en algunos momentos del desarrollo de las actividades matemáticas puedan participar los artesanos. Esto lo logramos en Morales (2016), como se ve en la fotografía 2.



Fotografía 2. Artesana explicando a los alumnos cómo realizar algunos procesos artesanales.

Fuente: Morales (2016).

En la fotografía 2 se ve a una artesana y madre de familia de una de las niñas de la clase, enseñando a entrecillar y otros procesos artesanales. El propósito de la vinculación en la fase educativa de los artesanos que participaron en la fase etnográfica no es para que los alumnos aprendan a ser artesanos, sino para que respondan matemáticamente a las acciones o preguntas que proponen los artesanos y los profesores (titular y en formación) más la valoración por parte de ellos de las prácticas artesanales. La enseñanza paralela y comparativa es la respuesta incluyente a la institucionalización de un solo saber en la clase de matemáticas.

En los planes de clase el diseño de las *actividades matemáticas* o *medios didácticos* merece toda nuestra atención. Este diseño debe tener en cuenta el enfoque paralelo y comparativo. En el cuadro 1 se presenta el formato que hemos conciliado en algunas monografías para la planeación de actividades matemáticas mediante el enfoque de enseñanza paralela y comparativa. Se puede notar que hay una estructura en el diseño de estas actividades que se podría resumir así:

- Preliminares: personas participantes, tema y grado escolares, tipos de pensamientos, estándares, DBA y temas; propósitos de aprendizaje, competencias, desempeño; y perfil del alumno y característica de la comunidad.
- Exploración de conocimientos previos sobre el concepto matemático objeto de estudio (tanto de la práctica artesanal o la actividad que se analizó en la fase etnográfica como del tema matemático escolar). Indagación sobre la aceptación o no de otras matemáticas.
- Planteamiento de actividades matemáticas que le dan el mismo lugar a la matemática escolar y a la matemática artesanal o producida en actividades.
- Los soportes teóricos del diseño del cuadro 1.
- Los recursos para emplear o desarrollar y sus tiempos.
- La secuencia de tres momentos que conforma la(s) clase(s): 1) exploración de conocimientos previos; 2) estructuración, práctica y ejecución; y 3) valoración e institucionalización (también llamados inicio, desarrollo y cierre).

Cuadro 1. Planeación de actividades matemáticas mediante el enfoque de enseñanza paralela y comparativa.

<p>Profesor(a): nombre del profesor titular, maestros en formación y asesor.</p>	<p>Conceptos artesanales: se listan los datos hallados en la fase etnográfica.</p>	<p>Tiempo: según planeación, pero regularmente los planes de clase están pensados para una o dos semanas.</p>	<p>Fecha:</p>
<p>Tema y grado escolares: los escogidos para la implementación.</p>			
<p>Pensamiento: está relacionado con la temática de la clase, se encuentra en los lineamientos curriculares planteados por el MEN y en los <i>Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas</i>.</p>			
<p>Estándar: de acuerdo con el pensamiento y el grado en el que se implementará, están en los <i>Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas</i>.</p>			
<p>DBA: son los <i>Derechos Básicos de Aprendizaje</i> planteados por el MEN y están organizados por grados y pensamientos.</p>			
<p>Tema: dependen del objeto matemático identificado en la práctica artesanal y los lineamientos curriculares planteados por el MEN.</p>			
<p>Propósito de aprendizaje: son las evidencias de aprendizaje, puedes encontrarlas en los DBA. También se puede denominar <i>indicador de aprendizaje</i>, o simplemente <i>indicador</i>, aunque recientemente se habla de <i>metas de aprendizaje</i>.</p>			
<p>Competencias: se encuentran en los lineamientos curriculares (MEN) y en los Estándares, pueden ser de ayuda para identificar las competencias que se desarrollarán con las actividades. Estos documentos plantean las competencias de Razonamiento, Comunicación, Ejercitación, Cultura ciudadana. Estas competencias deben colocarse en el centro del enfoque de enseñanza paralela y comparativa.</p>			
<p>Perfil del alumno y del profesor titular: depende la muestra que se escogerá.</p>			
<p>Característica de la comunidad del entorno de la institución educativa: se describe en lo posible sus condiciones socioeconómicas, políticas, culturales, religiosas.</p>			

Continúa

Fase	Momentos	Actividades	Recursos	Tiempo
Inicio	Exploración de conocimientos previos	Se plantean interrogantes para indagar qué saben sobre la práctica artesanal y el tema escolar. Se indaga sobre la aceptación o no de otras matemáticas. Se van tomando notas de las respuestas. Después de indagar por la práctica artesanal, se proyecta un video que la resume. Se presentan los artefactos empleados en la práctica artesanal, si es el caso.		
		Se comienza con interrogantes sobre lo observado en la práctica artesanal, se pregunta si hay o no matemáticas en lo observado en el video. En esta columna se escriben todas las actividades y se agregan imágenes donde se evidencie cómo se desarrollarán. Progresivamente se van presentando los conceptos matemáticos identificados por los estudiantes con las características o la temática que se desea implementar. Se debe usar el lenguaje matemático de los entrevistados en la fase etnográfica y estar atento si emerge un lenguaje matemático en los alumnos, tomar nota de ello. Comparar estos dos lenguajes si es posible. Luego, hacer una triangulación entre estos dos lenguajes y el lenguaje matemático escolar. Los tres lenguajes merecen igual valoración. Se realizan situaciones adidácticas, en lo posible en grupos de 3 alumnos. El conocimiento que emerge debe ser sistematizado en papel, computador o el tablero y luego debe ser debatido en el salón de clases, con la moderación del profesor. El conocimiento que emerge de esta fase de la clase debe ser valorado por el profesor; se trata de valorar la etnomatemáticas de sus alumnos, cada dibujo, palabra, gesto, etc. debe ser valorado. El conocimiento que emerge de esta situación adidáctica dará elementos de juicio sobre el tipo de aprendizaje paralelo y comparativo que hubo, si se valora por igual o no por parte de los alumnos el saber matemático artesanal o de actividades con el saber matemático escolar.	Se describen todos los recursos que usaremos para la implementación de la clase, como artesanos, profesor titular, maestros en formación, profesor asesor, artefactos de la propia práctica artesanal o imitación de ellas o equivalentes (según el grado de riesgo que pueden acarrear para los alumnos), instrumentos geométricos institucionalizados, plataformas web, videobeam, tablero, talleres, etc. No se debe ahorrar esfuerzo en la divulgación audiovisual o manipulación de los artefactos.	El tiempo que se destinará a cada actividad dependerá de los objetivos de aprendizaje. Cada grupo es un contexto diferente y el tiempo puede variar.
Cierre	Valoración e institucionalización	Se hace énfasis en la valoración de las matemáticas que emerjan en clases, especialmente la que se encuentra en las prácticas artesanales, la que se encuentra en los textos escolares de matemáticas y la que producen los alumnos en las situaciones adidácticas. Así, la institucionalización del saber matemático, a cargo del profesor, es incluyente de otras formas de hacer, pensar y comunicar matemáticas. Al alumno le corresponde valorar y comprender las matemáticas que emerjan en las clases.		

Pilotaje

Según Burgos y Escalona (2017) es recomendable realizar una prueba piloto para asegurar la validez de instrumentos y procedimientos, que permite la obtención de datos en una investigación. Así, en el enfoque didáctico del programa en Etnomatemáticas siempre se pone a prueba o se hace un pilotaje de los planes de clase. Estos planes regularmente están diseñados para una o dos semanas de clases, mínimo dos sesiones y máximo cuatro. El pilotaje se aplica a un grupo focal con presencia del profesor titular, en una sola sesión de clases o máximo dos. En el pilotaje, mientras los maestros en formación van desarrollando los planes de clase con los alumnos, el profesor titular y el asesor del trabajo de grado son observadores del proceso y van tomando notas (aciertos y desaciertos) que

luego se comparten a los maestros en formación para su respectiva discusión. Los maestros en formación no son pasivos, ellos también hacen sus propias anotaciones en diarios de campo. Así, el pilotaje es la implementación por primera vez en el aula de clases, con estudiantes del grado escolar respectivo. En el pilotaje se analiza si las actividades matemáticas realmente se ponen en relación paralela y comparativa entre los datos de la fase etnográfica y los contenidos correspondientes de la matemática escolar. También se corrobora si las herramientas y recursos usados son óptimos y no atentan contra el medio ambiente y la integridad de los alumnos. El pilotaje también se filma y se transcribe en su totalidad empleando los signos Val.Es.Co. La fotografía 3 muestra un pilotaje que se hizo del M-TDG de Utria y Felizzola (2020) con un grupo focal de quinto de primaria.



Figura 11. Pilotaje sobre estructuras en artesanías en Usiacurí y simetrías escolares.

Fuente: Utria y Felizzola (2020).

Con las observaciones que reciben por escrito los maestros en formación, del profesor titular y de su asesor, más sus propias notas, construyen una *matriz de aciertos, desaciertos y ajustes teóricos y metodológicos*. Para la

cohorte de monografías del 2020 y lo que va del 2021, la mayoría de los pilotajes, excepto Utria y Felizzola (2020), se realizaron por medio de estudios de casos o grupos focales manteniendo el distanciamiento social, para

este momento no había alternancia o presencialidad en las clases debido a la pandemia producida por la COVID-19.

Matriz de aciertos, desaciertos y ajustes teóricos y metodológicos de planes de clases

Este documento nos ayuda a ajustar la versión final de los planes de clase que se implementarán. Esta matriz es una tabla a tres columnas, con los encabezados: “Aciertos”, “Desaciertos” y “Ajustes”. La matriz responde a unos criterios de tipo teórico y metodológico. Con los maestros en formación se hace la discusión sobre qué es un acierto, qué es un desacierto y qué es un objetivo de aprendizaje. Se ha notado que estos aspectos tienen significado según el contexto cultural de la institución educativa donde se van a implementar los planes de clase, es decir, lo que puede considerarse un acierto o un desacierto en una institución educativa tal vez en otra no lo sea. En Muñoz *et al.* (2020), se puede ver un ejemplo de una matriz de aciertos, desaciertos y ajustes teóricos y metodológicos. Las actividades a las cuales se hace alusión en la matriz también se pueden consultar en la monografía mencionada.

Análisis de resultados de la implementación final de los planes de clases: el conocimiento matemático de los alumnos

A partir de Morales (2016), comenzamos a aplicar situaciones didácticas basadas en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Si bien hay un fondo sobre el aprendizaje y la institucionalización del saber que nos distancia de ella, hay fases y componentes con los cuales nos identificamos y cuya importancia en el desarrollo de planes de clase, para nosotros, es irrefutable. En el caso del aprendizaje de las matemáticas, decidimos apoyarnos en los planteamientos de Luis Radford, pues el enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas demanda que el aprendizaje esté mediado por artefactos. Radford (2017) plantea que los instrumentos o artefactos que se emplean en una labor o actividad toman significado y sentido en el proceso que se desarrolla en esta. Una labor o un trabajo en determinada práctica o actividad cultural forman parte del desarrollo del ser, “es a través de la labor o trabajo que los individuos se desarrollan y se transforman continuamente” (Radford, 2014, p. 137). De esta manera, en una labor se identifican saberes culturales y científicos que se transforman en un modo de vida. En este sentido, el mismo autor (2017) plantea el aprendizaje como una adaptación a las prácticas culturales. Por tanto “aprender es más bien la fusión entre modos culturales de reflexionar y actuar, y una conciencia que trata de percibirlos” (Radford, 2006, p. 1791). Radford (2017) manifiesta que

En la teoría de la objetivación, el aprendizaje se teoriza como procesos de objetivación, es decir, aquellos procesos sociales de volverse, progresiva y críticamente, consciente de una forma codificada de pensamiento y de acción

—algo que notamos gradualmente y al mismo tiempo adquiere significado—. Son procesos de objetivación aquellos actos de notar significativamente algo que se revela a la conciencia por medio de nuestra actividad corpórea, sensorial y artefactual. Es el notar o percibir algo (lo “en sí”) que se revela en la intención emergente proyectada en los signos o en el movimiento kinestésico, en el curso de la actividad práctica concreta —la revelación del “en sí” que se convierte en “para sí” en el curso de su aparición y por lo tanto se transforma en conocimiento para nosotros. (p. 121)

Lo anterior no solo ha servido de apoyo para orientar los planes de clase hacia un tipo de aprendizaje, sino que además ha servido para considerar que no se trata de institucionalización del saber en la clase de matemática, sino de institucionalización de saberes.

En cuanto a la implementación final de los planes de clase, en esta fase se debe describir detalladamente lo que sucedió en el pilotaje, cómo fueron los indicadores o metas de aprendizaje paralelo y comparativo, se analiza el grado de conciencia de los alumnos sobre los estándares de competencias en matemáticas; en particular, el centro del análisis debe estar en el conocimiento que emerge de las situaciones adidácticas, analizar las praxeologías desarrolladas por los alumnos al resolver las actividades que proponen los planes de clase. En el análisis de resultados se deben tener en cuenta los indicadores o metas de aprendizaje establecidos en el informe.

Si la implementación de los planes de clase es virtual o asistida remotamente por tecnología, se deberá estudiar lo que se recomienda pedagógicamente para este tipo de ambiente de aprendizaje. En el caso de la implementación final de los planes de clase presenciales recomendamos tener en cuenta el cuadro 1,

contextualizarlo a cada una de las necesidades culturales, económicas, políticas, religiosas, entre otras, de cada región o país. Hay que volver al cuadro 1 cuantas veces lo requieran el contexto y la aplicación de los planes de clases.

Los cambios en la evaluación

El gran —inmenso— obstáculo que tiene esta propuesta de enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas es la evaluación, a nivel local, institucional, nacional e internacional. Un libro que recomendamos y sobre el cual nos hemos apoyado es el de García (2013), *Currículo y evaluación en matemáticas*. García pudo mostrar cómo la evaluación en matemáticas es un área problemática; por ejemplo, Moreno y Ortiz (2008) demostraron cómo la evaluación pasa incluso por concepciones de maestros. Mientras la evaluación en clases de matemáticas, los exámenes estatales que se emplean para el ingreso a la educación universitaria y las pruebas internacionales nos sigan comparando con países que tienen muchos recursos para la educación, sigan privilegiando un solo saber matemático, habrá un gran reto para innovar en la enseñanza de las matemáticas. Consideramos que, además de problemática, en la fase educativa hay muchos desafíos: ¿qué tan dispuestos estamos a cambiar nuestras prácticas tradicionales de evaluación en educación matemática? Esta propuesta de enfoque didáctico del programa en Etnomatemáticas implicará cambios en la evaluación, pues la enseñanza paralela y comparativa entre los saberes artesanales o culturales y los escolares, como respuesta a la institucionalización de un solo saber matemático, demanda cambios estructurales en la evaluación.

Por ahora, la limitación que tenemos es el tiempo de desarrollo de los planes de clase, lo cual no nos ha permitido investigar sobre procesos de evaluación, pero avanzamos en ello.

En nuestro contexto colombiano se deben seguir las recomendaciones teóricas del MEN, entre ellas la guía 34 (MEN, 2008), sobre el mejoramiento institucional de la autoevaluación al plan de mejoramiento, y las orientaciones para el fortalecimiento del Sistema Institucional de Evaluación de los Estudiantes (SIEE) (MEN, 2018). Consideramos que la evaluación no puede caer en el error de privilegiar la matemática escolar cuando toda la clase se basó en la inclusión de otros saberes matemáticos, ni tampoco la fase o proceso de institucionalización de saberes puede caer el error de institucionalizar un solo saber. Lo anterior podría ser un llamado de reflexión a comunidades indígenas donde algunos de sus profesores podrían institucionalizar solo su saber ancestral cuando estamos en medio de una globalización.

El reto nacional

Lo que denominamos *el reto nacional* ha sido analizado por diversos investigadores en el mundo, entre ellos Bishop (1999) con su propuesta de enculturación del currículo matemático y Knijnik (2006), cuando analizaron los métodos de campesinos para medir la tierra y los métodos institucionalizados en la escuela para medir superficies. Nuestro reto nacional es que el MEN incluya en la enseñanza de las matemáticas y en las pruebas estatales otras formas de pensar, hacer y comunicar matemáticas., así que los retos nacionales serán diferentes según el contexto.

Por último, queremos presentar una muestra de algunos resultados de las monografías que se enunciaron en este artículo.

Cuadro 2. Evidencias de trabajos de grado en la fase educativa.



Mosquera *et al.* (2015). Fueron varios los conceptos analizados, como longitud, medición al ojo, estimación y el sistema de medidas convencional teniendo como referencia dos sistemas de medidas de pescadores artesanales con cometa.



Álvarez y Santana (2020). Este trabajo tiene como objetivo principal desarrollar actividades problematizadoras que posibiliten la enseñanza paralela y comparativa entre las figuras planas y cuerpos geométricos, haciendo énfasis en conceptos de área y perímetro y tomando como referencia estructuras de las artesanías de Usiacurí.



Hernández y Salas (2021), desarrollada en el marco de pandemia. Se analizaron medidas de capacidad que emplea un alumno de grado séptimo tomando como referencia la elaboración de bollos de mazorca en el barrio Pinar del Río de la ciudad de Barranquilla.

Fuente: elaboración propia.

Retos o delimitaciones

Esta propuesta de enfoque didáctico del programa en Etnomatemáticas abre diversos frentes de investigación, así que invitamos a la comunidad de investigadores etnomatemáticos a profundizar en ellos. Proponemos los siguientes:

1. La forma de desarrollar la problematización de resultados etnográficos en el aula de clases de matemáticas. ¿Qué otros formatos para los planes de clase o estrategias se podrían desarrollar para este tipo de enfoque de una clase de matemáticas?
2. Con respecto a los significados que desarrollan los alumnos en clases de matemáticas por medio de este enfoque, sería pertinente responder la pregunta: ¿Qué tipo de praxeologías desarrollan los niños al analizar prácticas artesanales? ¿Son similares a las desarrolladas con las actividades planteadas con los textos escolares?
3. La construcción de instrumentos analíticos que permitan identificar las praxeologías que desarrollan los alumnos cuando realizan actividades matemáticas en aula de clases. Por ahora se está indagando sobre los aportes que pueden brindar en ello la teoría antropológica de lo didáctico.
4. Comprender cada vez más lo que significa enseñanza paralela y comparativa, ¿es realmente paralela o sucesiva?, ¿es comparativa?, ¿pueden o logran los alumnos llegar a hacer el proceso comparativo entre las matemáticas escolares y las locales?
5. El diseño de evaluaciones que tengan en cuenta el enfoque paralelo y comparativo. Tal vez sea este uno de los campos más fecundos de los que proponemos.
6. Cuáles son los cambios en las prácticas profesionales de los maestros en formación y del profesor titular que interviene en la implementación de los planes de clases que proponemos cuando desarrollan sus clases sin un acompañamiento.

Por último, solo queremos manifestar que estamos convencidos de que en nuestras prácticas sociales no hay una sola forma de contar, medir, de orientarnos témporo-espacialmente, diseñar, etc. Por ello, pensamos que la educación matemática no puede privilegiar un solo tipo de saber matemático en sus procesos de institucionalización, y menos aún en sus procesos de evaluación (que termina siendo un gran proceso de exclusión). Por eso, avanzamos en la construcción de una propuesta incluyente de otros saberes

matemáticos en clases de matemáticas que hemos denominado un *enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas*.

Referencias

- Álvarez, L. y Rada, J. (2021). *Algunas medidas campesinas aplicadas en sus cultivos en los departamentos de Córdoba y Atlántico: Un proceso comparativo y problematización de resultados en el aula de matemáticas* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD
- Aroca, A. (2008a). Pensamiento geométrico en las mochilas arhuacas. *Revista Actualidad y Divulgación Científica*, 11(2), 71-83.
- Aroca, A. (2008b). Una propuesta metodológica en etnomatemáticas. *Revista Actualidad y Divulgación Científica*, 11(1), 67-76.
- Aroca, A. (2013a). *Diseños geométricos en las culturas pastos y quillacingas de Colombia*. Editorial Académica Española.
- Aroca, A. (2013b). *Sucesión de etnomatemáticas: La curtiembre artesanal del cuero. Tomo 1: Colección sobre trabajos de investigación en etnomatemáticas*. Editorial Académica Española.
- Aroca, A. (2015a). Diseños prehispánicos, movimientos y transformaciones en el círculo y formación inicial de profesores. *Bolema*, 29(52), 528-548.
- Aroca, A. (2016). Modelación matemática situada en un oficio. El caso de artesanos de la madera. *Revista Actualidad y Divulgación Científica*, 19(1), 227-235.
- Aroca, A. (2018a). Aprendizaje paralelo y comparativo: La postura didáctica del programa Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(2), 4-7.
- Aroca, A. (2018b). *Etnografía del saber matemático de los pescadores de Buenaventura, Pacífico colombiano. Elementos para una educación matemática contextualizada*. Editorial Universidad del Atlántico.
- Aroca, A. (2018c). *Matemáticas de orden social: Tensión entre las etnomatemáticas y cambios socioeconómicos del país*. Editorial Universidad del Atlántico.
- Aroca, A. (2018d). Enseñanza paralela y comparativa: la postura didáctica del programa etnomatemática. En S. Valbuena, L. Vargas y J. Berrío, (Presidencia), *Encuentro de Investigación en Educación Matemática*. Memorias del congreso llevado a cabo en la ciudad de Barranquilla, Colombia.
- Aroca, A. (s.f.). El concepto de etnografía matemática (en prensa). En I. Londoño y H. Blanco-Álvarez (Editores), *Reflexiones sobre Educación Matemática desde la Etnomatemática*. Editorial Universidad de los Llanos. En prensa.
- Aroca, A. (2021b). (2021, 25 de septiembre). *Libro de etnomatemática ayudó a conservar práctica artesanal y a resolver un conflicto*. [Matemáticas del Pueblo. People's

- Math] [Video de YouTube]. <https://www.youtube.com/watch?v=TSNWJ6bOOOk&t=83s>
- Aroca, A. y Álvarez, L. (2016). Condiciones témporo-espaciales de niños que habitan en una copropiedad horizontal de la ciudad de Barranquilla, Colombia. *Revista Actualidad y Divulgación Científica*, 19(2), 479-487.
- Aroca, A. y Cauty, A. (2017). Dificultades metodológicas en la investigación sobre pensamiento matemático indígena y su paradójica educación matemática. *Bolema*, 31(58), 841-860. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a16>
- Arzarello, F. y Edwards, L. (2005). Gesture and the construction of mathematical meaning. En H. L. Chick y J. L. Vincent. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 123-154). PME.
- Barros, C. y Barros, R. (2015). Los medios audiovisuales y su influencia en la educación desde alternativas de análisis. *Universidad y Sociedad*, 7(3), 26-31.
- Bartolini, M. y Mariotti, M. A. (2008). *Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a vygotskian perspective*. http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/bartolini-mariotti_handbook
- Barton, B. (2008). *The language of mathematics*. Springer.
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática, la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós.
- Bishop, A. (2000). Enseñanza de las matemáticas: ¿Cómo beneficiar a todos los alumnos? En N. Gorgorió, A. Deulofeu y A. Bishop (Eds.), *Matemáticas y educación: Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 35-56). Graó.
- Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Programa Editorial Universidad del Valle.
- Blanco-Álvarez, H., Higuera Ramírez, C. y Oliveras, M. L. (2014). Una mirada a la etnomatemáticas y la educación matemática en Colombia: Caminos recorridos. *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas*, 7(2), 245-269.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Burgos, F. J. y Escalona, E. (2017). Prueba piloto: Validación de instrumentos y procedimientos para recopilar data antropométrica con fines ergonómicos. *Ingeniería y Sociedad UC*, 12(1), 3147.
- Cantillo, L. y Pupo, N. (2020). *Análisis del sistema de medidas no convencionales en una práctica artesanal y su problematización en un aula de clases de sexto grado* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD
- D'Ambrosio, U. (2004). Educación matemática, Etnomatemáticas i pau. *Perspectiva Escolar*, 284, 15-22.
- D'Ambrosio, U. (2006). *Ethnomathematics: Link between traditions and modernity*. Sense Publishers.
- D'Ambrosio, U. (2012). The Program Ethnomathematics: Theoretical Basis and the Dynamics of Cultural Encounters. *Cosmopolis. A Journal of Cosmopolitics*, 3(4), 13-41.
- D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del Programa Etnomatemáticas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas*, 7(2), 100-107.
- D'Ambrosio, U. y Knijnik, G. (2020). Ethnomathematics. En S. Lerman, (ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education. Second Edition* (pp. 283-288). Springer.

- D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Cooperativa Editorial Magisterio.
- García, G. (2013). *Currículo y evaluación en matemáticas: Un estudio en tres décadas de cambio en la educación básica*. Cooperativa Editorial Magisterio.
- Gerdes, P. (1996). Chapter 24: Ethnomathematics and Mathematics Education. En A. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of Mathematics education* (pp. 909-943). Kluwer Academics Publishers.
- Geromel, R. C., Shinkawa Da-Silva, G. Z. y De Azevedo Bonfim de Freitas, M. F. (2018). Etnomatemáticas e a utilização da calculadora no contexto de Empreendimentos Econômicos Solidários. *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas*, 11(2), 52-75.
- González, B. y Claro, A. (2015). *El potencial educativo de la fotografía: Cuaderno Pedagógico*. Consejo Nacional de la Cultura y las Artes.
- Guarumo Ladino, I. L. (2018). Didáctica del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos en instituciones indígenas del resguardo Escopetera y Pirza, Riosucio-Caldas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas*, 11(2), 76-97.
- Hawking, S. y Pensore, R. (2015). *La naturaleza del espacio y el tiempo*. Editorial Universitaria.
- Hernández, J. y Salas, M. (2021). *Comparación de las medidas de capacidad empleadas en dos prácticas artesanales y su problematización en el aula de clases de séptimo grado* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD
- Hernández-Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, M. P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill.
- Hernando, J. y Osorio, D. (2018). *Representación de las nociones témporo-espaciales de los conductores de buses y su aporte a la educación matemática en séptimo grado* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD
- Jaraba, N. y Martínez, N. (2021). *Medidas de área y perímetro basadas en una práctica artesanal emergente en el marco de la COVID -19: Una perspectiva etnomatemática en estudiantes de quinto grado* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD
- Knijnik, G. (2006). *Educação matemática, culturas e conhecimento na luta pela terra*. Edunisc.
- Maradey, G. (2016). *Algunas nociones geométricas en los hornos artesanales de carbón y su inserción en el aula de clases* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD

- Maradey, G. y Aroca, A. (2015a). *Algunas nociones geométricas en los hornos artesanales de carbón y su inserción en el aula de clases*. R. Cantoral (Presidencia), Relme 29. Congreso llevado a cabo en la ciudad de Panamá, Panamá.
- Maradey, G. y Aroca, A. (2015b). Superficies esféricas en los hornos artesanales de carbón y educación geométrica. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 147-153.
- Maradey, G., Martínez, C. y Aroca, A. (2015). Algunas nociones geométricas en los hornos artesanales de carbón y su inserción en el aula de clases. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 142-144. <http://ojs.asocolme.org/index.php/RECME>
- Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas* (Traducción: Martín Eduardo Acosta Gempeler y Jorge Enrique Fiallo Leal). Editorial Universidad Industrial de Santander.
- Martins, J. P. y Mendes, I. A. (2018). Exploração e problematização de simetrias em artefatos socioculturais para o uso no ensino fundamental. *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas*, 11(2), 8-30.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares. Matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. 2006. Documento n.º 3*. Imprenta Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN). (2016a). *Derechos Básicos de Aprendizaje para Matemáticas (volumen 2)*. Bogotá: Panamericana Formas e Impresos.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN). (2016b). *Documento Fundamentación Teórica de los Derechos Básicos de Aprendizaje (volumen 2) y de las Mallas de Aprendizaje para el Área de Matemáticas*. Universidad de Antioquia.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN). (2018). *Siempre día E. Orientaciones para el fortalecimiento del Sistema Institucional de Evaluación de los Estudiantes*. Legis.
- Montiel, G. y Del Castillo, A. (2009). ¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta. En P. Lestón. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 459-467). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- Morales, M. (2016). *Aproximación a las nociones geométricas empleadas en las artesanías de Usiacurí y aportes a la educación geométrica* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD
- Morales Beleño, M., Aroca, A. y Álvarez Toro, L. J. (2018). Etnomatemáticas y Educación matemática: análisis a las artesanías de Usiacurí y educación geométrica escolar. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(2), 120-141.
- Morales Beleño, M. y Aroca-Araujo, A. (2019). Deconstrucción del diseño, un análisis a la base del diseño de las artesanías de Usiacurí. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 12(2), 6-28.
- Moreno, I., Ortiz, J. (2008), Docentes de educación básica y sus concepciones acerca de la evaluación en matemáticas. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa* 1(1), 140-154.
- Mosquera, G., Rodríguez, C. y Suárez, S. (2015). *Dos sistemas de medidas no convencionales en la pesca artesanal con cometas en Bocas de Ceniza y su potencial para la educación matemática* (tesis de pregrado). Universidad

del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD

Muñoz, N., Pacheco, E. y Paternina, O. (2020). *El diseño de las máscaras de Galapa: Una opción para el aprendizaje de simetrías en séptimo grado* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD

Muñoz, O. y Torres, G. (2021). *Análisis de dos magnitudes en la elaboración del bollo limpio y su problematización en sexto grado* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD

Oliveras, M.L. (1999). Ethnomathematics and mathematics education. *Zentralblatt für Didactic der Mathematik*, 31(3), 85-91.

Osorio, J. y Hernández, D. (2018). *Representación de las nociones témporo-espaciales de los conductores de buses y su aporte a la educación matemática en séptimo grado*. (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. <https://docs.google.com/document/d/1cMjvjóρENOECwv7YtnpfSLiLbJWFS19u-blxOBRjT3UM/edits>

Palacios, R. y Ramírez, F. (2015). *Cálculo mental aritmético desde el conocimiento de algoritmos etnomatemáticos de Barranquilla* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD

Palacios, R., Ramírez, F. y Aroca, A. (2015a). *Cálculo mental aritmético desde el conocimiento de algoritmos etnomatemáticos en Barranquilla*. En R. Cantoral (Presidencia), congreso llevado a cabo en la ciudad de Panamá, Panamá.

Palacios, R., Paternoso, F. y Aroca, A. (2015b). Operaciones básicas de la aritmética desde el conocimiento de algoritmos etnomatemáticos de Barranquilla. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 1(1), 60-65.

Paternina-Borja, O., Muñoz-Granados, N., Pacheco-Muñoz, E. y Aroca, A. (2020). *Simetrías inmersas en el proceso de la elaboración de la máscara del torito de Galapa*. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 11(1), 141-157.

Quintero, N. (2020). *Educación [Matemática] Rural y Decolonialidad: una problematización indisciplinar de prácticas sociales del Trapiche* (tesis de maestría). Universidad de Antioquia.

Rabardel, P. (1995a). Qu'est ce qu'un instrument? Appropriation, conceptualisation, mises en situation. *Les dossiers de l'ingénierie éducative*, 61-65.

Rabardel, P. (1995b). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. fffhal-01017462f

Rabardel, P. (2000). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. En J-L. Dorier., M. Artaud., A. Michèle., R. Berthelot., R. Floris,

- R. (Eds.), *Actes de la Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 203-213). La Pensée sauvage.
- Rada, J. y Álvarez, L. (2021). *Algunas medidas campesinas aplicadas en sus cultivos en los departamentos de Córdoba y Atlántico un proceso comparativo y problematización de resultados en el aula de matemáticas*. (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. <https://docs.google.com/document/d/1fHAKMyzP6YVDvTWMg-GE6lXvnp9pGNEZjUpHhlm2VXnw/edit>
- Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), pp. 37-70.
- Radford, L. (2005). Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of objectification. En Chick, H.; Vincent, J. (eds.): *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1. Melbourne. University of Melbourne, pp. 143-145.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (número extraordinario 1), 103-129.
- Radford, G. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En Radford, L., Schubring, G. y Seeger, F. (Eds.). *Semiotics in mathematics education epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Sense Publishers.
- Radford, L. (2014a). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educ Stud Math*, 85, 405-422.
- Radford, L. (2014b). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132-150.
- Radford, L. (2017). Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. En B. D'Amore y L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Rey, M. y Aroca, A. (2011). Medición y estimación de los albañiles, un aporte a la educación matemática. *Revista Actualidad y Divulgación Científica*, 14(1), 137-147.
- Rodríguez, C., Mosquera, G. y Suárez, S. (2015). *Dos sistemas de medidas no convencionales en la pesca artesanal con cometas en bocas de ceniza y su potencial para la educación matemática* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://docs.google.com/document/d/17vh6VOSVMpd1N9mrBe1-GdnQf8-4_Jc-kP4vWaxrrQxc/edit
- Rodríguez, C., Mosquera, G. y Aroca, A. (2019). Dos sistemas de medida no convencionales en la pesca artesanal con cometa en Bocas de Ceniza. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 12(1), 6-24.
- Rosa, M. y Orey, D. C. (2017). *Etnomodelagem: a arte de traduzir práticas matemáticas locais*. Editora Livraria da Física.
- Santana, G. y Álvarez, L. (2020). *Patrones para la elaboración de artesanías en Usiacurí y problematización de resultados en un ambiente escolar matemático* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD
- Skovsmose, O. (2010). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6(1), 3-26.
- Sontag, S. (2006). *Sobre la fotografía*. Santillana Ediciones Generales.

- Trouche, L. (2005a). *Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques*. http://profmth.uqam.ca/~maheuxjf/cours/doc865m/TroucheArtefactInstruments_partieB.pdf
- Trouche, L. (2005b) Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(1), 91-138.
- Trujillo Varilla, O. E., Miranda Viramontes, I. y De la Hoz Molinares, E. E. (2018). Los sistemas de medida en la comunidad Arhuaca: Su uso en distintos contextos. *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas*, 11(2), 31-51.
- Utria, L. y Felizzola, R. (2020). *Diseño de estructuras de alambre de las artesanías de Usiacurí y problematización de resultados en clases de matemáticas* (tesis de pregrado). Universidad del Atlántico, Barranquilla, Colombia. https://drive.google.com/drive/folders/1yU59mMS4Y-qcarpc-SF3-15Y_Y17fHpD
- Vasilachis de Gialdino, I. (2006). *Estrategias cualitativas de investigación*. Gedisa.
- Vergel, R. (2015). El gesto y el ritmo en la generalización de patrones. *UNO. Didáctica de las Matemáticas*, 73, 24-31.
- Vygotsky, L. S. (1930). *The instrumental method in psychology. Text of a talk given in 1930 at the Krupskaya Academy of Communist Education*. <https://www.marxists.org/archive/vygotsky/works/1930/instrumental.htm>
- Vygotsky, L. S. (1981). *The development of higher mental functions*. https://people.ucsc.edu/~gwells/Files/Courses_Folder/documents/VygotskyHigherMF.pdf
- Vygotsky, L. S. y Luria, A. (1994). Tool and symbol in child development. En R. van der Veer y J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky Reader* (pp. 99-174). Blackwell.
- Vilca-Apaza, H. M. y Sosa-Gutiérrez, F. (2020). Etnogeometría aymara: Propuesta de terminología matemática para la escuela rural de Perú. *Revista Latinoamericana de Etnomatemáticas*, 13(2), 66-86.
- Watson, A., Ohtani, M. (2015). *Task design in mathematics education*. ICMI Study 22. Springer International Publishing.

Para citar este artículo

Aroca, A. (2022). Un enfoque didáctico del programa de Etnomatemáticas. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (52), 211-248. <https://doi.org/10.17227/ted.num52-13743>