# La TMCC en la revisión del estudio de la función en un problema de ingeniería*

- The TMCC in Reviewing the Study of Functions in an Engineering Problem
- A TMCC na revisão da função em um problema de Engenharia  to revisit the study of function in an engineering problem

Barbara Lutaif Bianchini**
Gabriel Loureiro de Lima***
Eloiza Gomes****

* Este texto es un desglose del trabajo titulado "O Problema dos Pórticos: uma intervenção didática construída para a disciplina de Cálculo Diferencial Integral", presentado por los autores en el XLVIII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, y se hace referencia a él como Lima *et al.* (2020).

** Doctora en Educación (Psicología de la Educación). Profesora de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo (PUC-SP). barbara@pucsp.br.

*** Doctor en Educación Matemática. Profesor de la Pontificia Universidad Católica de São Paulo (PUC-SP). gllima@pucsp.br.

**** Doctora en Educación Matemática. Profesora del Instituto Mauá de Tecnología (IMT). eloiza@maua.br

## Forma de citar este artículo:

Bianchini, B., Lima, G. y Gomes, E. (2024). La TMCC en la revisión del estudio de la función en un problema de ingeniería. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (56), 275 - 300. https://doi.org/10.17227/ted.num56-18773

### Resumen

El objetivo de este artículo de investigación es compartir un estudio realizado en el ámbito de la fase epistemológica de la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias. Este estudio, desarrollado por Patricia Camarena Gallardo, consiste en la elaboración, presentación y análisis de una intervención didáctica con el propósito de retomar el estudio de las funciones en una asignatura inicial de cálculo diferencial e integral. Este enfoque se basa en un problema contextualizado de la ingeniería civil, específicamente una situación relacionada con el análisis dinámico de un pórtico. La elaboración de la intervención, con una duración prevista de 12 horas por clase, se sustentó metodológicamente en el análisis de un libro de texto sobre mecánica estructural, así como en dos libros sobre cálculo. Además, se tomaron en cuenta los programas de estudio de asignaturas de cálculo, temas relacionados con el desarrollo histórico de la noción de *función* y los obstáculos epistemológicos que se presentan en este proceso, así como las cuestiones cognitivas relacionadas con ella.

Palabras clave

matemáticas; cálculo; ingeniería civil; didáctica

### Abstract

The aim of this research article is to share a study conducted within the epistemological phase of mathematical theory in the context of the sciences. This study, developed by Patricia Camarena Gallardo, involves the development, presentation, and analysis of a didactic intervention aimed at revisiting the study

Fecha de recepción: 15/02/2023
Fecha de aprobación: 28/05/2024

of functions in an introductory course on differential and integral calculus. This approach is based on a contextualized problem in civil engineering, specifically a situation related to the dynamic analysis of a frame. The development of the intervention, with an expected duration of 12 hours per class, was methodologically supported by the analysis of a textbook on structural mechanics, as well as two calculus textbooks. Additionally, the study considered the curriculaof calculus courses, topics related to the historical development of the notion of *function*, the epistemological obstacles encountered in this process, as well as cognitive issues related to it.

Keywords

mathematics; calculus; civil engineering; didactics

## Resumo

O objetivo deste artigo de pesquisa é compartilhar um estudo realizado no âmbito da fase epistemológica da teoria matemática no contexto das ciências. Este estudo, desenvolvido por Patricia Camarena Gallardo, consiste na elaboração, apresentação e análise de uma intervenção didática com o propósito de retomar o estudo das funções em uma disciplina inicial de cálculo diferencial e integral. Esse enfoque baseia-se em um problema contextualizado da engenharia civil, especificamente uma situação relacionada com a análise dinâmica de um pórtico. A elaboração da intervenção, com uma duração prevista de 12 horas por aula, foi metodologicamente sustentada na análise de um livro de texto sobre mecânica estrutural, bem como em dois livros sobre cálculo. Além disso, foram considerados os programas de estudo de disciplinas de cálculo, temas relacionados com o desenvolvimento histórico da noção de *função* e os obstáculos epistemológicos que surgem neste processo, assim como as questões cognitivas relacionadas a ele.

Palavras-chave

matemática; cálculo; engenharia civil; didática

## Introducción

.El objetivo del presente artículo es presentar un estudio llevado a cabo en el ámbito de la fase epistemológica de la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias (TMCC), que se detallará más adelante, y que condujo a una intervención didáctica diseñada para ser implementada en una asignatura inicial de cálculo diferencial e integral. Esta intervención tiene como propósito retomar el estudio de las funciones a partir de un problema contextualizado de la ingeniería civil.

Este trabajo surge como respuesta a las demandas surgidas de las discusiones realizadas en el Grupo de Trabalho Ciências Básicas e Matemática na Engenharia (GT-CBME), vinculado a la Associação Brasileira de Educação em Engenharia (ABENGE). Entre los desafíos identificados en estas discusiones, se destacó la necesidad de involucrar a los docentes en la creación de materiales didácticos contextualizados para las asignaturas de Ciencias Básicas y Matemáticas en la Ingeniería, a partir de problemas relacionados con las diversas áreas de la ingeniería. Esta preocupación se centra en la mejora de la calidad de la educación en ingeniería y en la motivación de los estudiantes, en consonancia con las Directrices Curriculares Nacionales (DCN) para cursos de ingeniería en Brasil (2019).

Las reflexiones presentadas en este artículo se centran específicamente en la necesidad de proporcionar oportunidades para que los estudiantes, al ingresar a los cursos, revisen los conocimientos básicos que serán requisitos previos para la formación del futuro ingeniero. Se presenta un estudio realizado utilizando la fase epistemológica de la TMCC con el objetivo de desarrollar una intervención didáctica que, al aplicarse en una asignatura inicial de cálculo diferencial e integral dentro del currículo de un curso de ingeniería civil, permita al alumno repasar aspectos relacionados con el estudio de las funciones reales de una variable real, con un enfoque dirigido a la educación superior y a las aplicaciones que encontrará en las materias específicas del curso y en su futuro desempeño profesional.

## Metodología

La pregunta de investigación que buscamos abordar en este artículo es la siguiente: ¿cómo, apoyados en los procedimientos metodológicos de la fase epistemológica de la TMCC, podemos desarrollar una intervención didáctica a partir de un problema específico de ingeniería civil, con el potencial de permitir a los principiantes en un curso de ingeniería revisitar las funciones reales de una variable real, con un enfoque orientado a la educación superior y las aplicaciones que encontrarán en las asignaturas específicas del curso y en su futuro desempeño profesional, así como enfrentar y minimizar los obstáculos epistemológicos y las dificultades cognitivas asociadas a este concepto matemático?

Para abordar esta pregunta, realizamos inicialmente un estudio bibliográfico de naturaleza cualitativa, guiado por los procedimientos metodológicos de la fase epistemológica de la TMCC, que incluyen las etapas presentadas en la tabla 1.

Tabla 1. *Procedimientos metodológicos de la fase epistemológica de la* TMCC

| Etapa | Acción requerida |
|---|---|
| 1ª | La identificación de un contexto específico de Ingeniería Civil en el que se requiere la movilización de nociones relacionadas con el concepto de función real de una variable real. |
| 2ª | El análisis de una referencia bibliográfica relacionada con el contexto identificado con el objetivo de comprender cómo se moviliza la noción matemática pretendida. |
| 3ª | El análisis de los programas de las asignaturas de Matemáticas insertadas en el currículo de Ingeniería Civil con el objetivo de comprender cómo se revisita la noción de función al inicio de este curso. |
| 4ª | El análisis del orden epistemológico relacionado con el objeto función con el objetivo de comprender cómo ocurrió su desarrollo histórico. |
| 5ª | La identificación de los obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto de función |
| 6ª | El análisis de los libros de texto utilizados en las asignaturas iniciales de Cálculo Diferencial e Integral en los cursos de Ingeniería. |
| 7ª | El análisis de los aspectos cognitivos relacionados con la noción de función. |

Fuente: elaboración propia.

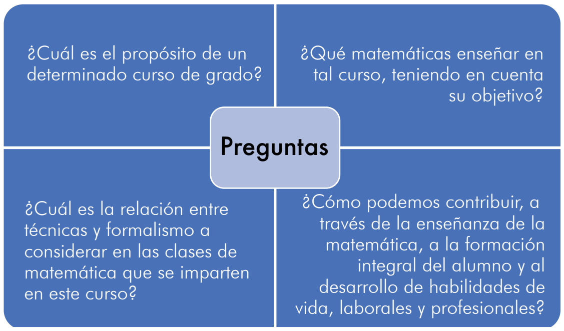
Como resultado de este estudio bibliográfico, detallado en este artículo, hemos elaborado una intervención didáctica que también será explicada en el texto. Antes de abordar cada una de las siete etapas mencionadas, realizaremos algunas consideraciones generales sobre la TMCC.

## Marco teórico: la teoría de la matemática en el contexto de las ciencias

Tras considerar, como aparece en Lima *et al.* (2018), que la mayoría de las teorías educativas se desarrollaron originalmente con un enfoque en temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje en la escuela básica, y que el nivel universitario tiene problemas y elementos específicos que lo caracterizan, la investigadora del Instituto Politécnico Nacional de México, Patricia Camarena, comenzó a elaborar un marco teórico específicamente dirigido a la enseñanza de la matemática en la universidad desde 1982. Este enfoque está diseñado especialmente para cursos en los que las matemáticas tienen un papel fundamental, como es el caso de la ingeniería. Los objetivos principales de la TMCC son establecer conexiones entre las matemáticas y otras disciplinas científicas, así como con las situaciones que los ingenieros enfrentan en su práctica profesional.

Siguiendo este marco teórico, según Camarena (2017), se buscan indicios de respuestas a las preguntas planteadas en la figura 1.

Figura 1. *Preguntas a las que se busca respuesta en el* TMCC




Fuente: elaboración propia.

Con relación específica a la última pregunta, es importante aclarar que, al referirse al *conocimiento integral*, Camarena (2013b) indica que este se relaciona con las capacidades de un estudiante para construir conocimiento, incluyendo: relacionarlo con lo previamente aprendido, abordarlo de manera interdisciplinaria en lugar de forma aislada y fragmentada, integrar conocimientos teóricos con los derivados de la práctica, y transferir los conocimientos adquiridos en la universidad a su futura actividad profesional.

Asimismo, el concepto de *competencia* en el ámbito de la TMCC, según Camarena (2011), se refiere a "la base del futuro profesional para afrontar una situación problemática mediante la integración de todos sus conocimientos, habilidades, actitudes y valores que se movilizan en sus estructuras cognitivas" (Camarena, 2011, p. 114. Énfasis nuestro).

Según Camarena (2013a), la TMCC se organiza como un sistema complejo que permite abordar los diferentes aspectos del ambiente de aprendizaje. Este sistema consta de cinco subsistemas, o fases de la teoría (*curricular*, *didáctica*, *epistemológica*, *docente* y *cognitiva*), que están interrelacionados con las condiciones sociológicas de los actores en el proceso educativo. En este trabajo, nos enfocamos únicamente en los aspectos relacionados con la *fase epistemológica* de la teoría, la cual utilizamos en la construcción de la intervención presentada. En esta fase, buscamos comprender cómo se conectan los conceptos matemáticos con los de otras disciplinas, como la ingeniería.

En cuanto a las otras fases, nos centramos únicamente en lo presentado en la tabla 2, basados en los planteamientos de Lima *et al.* (2019). Para una comprensión más detallada, sugerimos la lectura de obras como las de Camarena (2010, 2013a, 2013b) y Lima *et al.* (2016).

Tabla 2. *Breve descripción de las fases curricular, didáctica, docente y cognitiva de la* TMCC

| Fase | Breve descripción |
|---|---|
| Curricular | El objetivo principal es la construcción de un currículo de Matemática para una carrera específica en la que esta ciencia esté al servicio. |
| Didáctica | Incluye el Modelo Didáctico de la Matemática en Contexto (MoDiMaCo), que tiene como principal herramienta de trabajo problemas o proyectos (denominados *eventos contextualizados*) que integran asignaturas matemáticas y no matemáticas de una carrera determinada. |
| Docente | Debe buscarse desarrollar una formación que permita al docente trabajar, en consonancia con los preceptos de la TMCC, con el currículo desarrollado. |
| Cognitiva | El foco es analizar, desde un punto de vista cognitivo, el trabajo de los estudiantes en una situación de abordaje matemática desde el contexto de la carrera de grado en el que se insertan. |

Fuente: elaboración propia a partir de Lima *et al.* (2019).

Como señala Camarena (2013a), de manera simbiótica, tanto los contextos de otras ciencias dan sentido a los conceptos matemáticos, como estos también otorgan significado a los conceptos insertados en los contextos de otras ciencias.

Los resultados obtenidos en los análisis realizados en la fase epistemológica son los que posibilitan la construcción de materiales didácticos que se utilizarán para llevar a cabo un abordaje contextualizado de la matemática en una carrera específica. Según Camarena y González (2001), y Camarena (2012), para esta construcción se emplea, desde un punto de vista metodológico, una secuencia de procedimientos analíticos utilizando diversos tipos de textos como fuentes, como se detalla en la siguiente sección.

## Procedimientos para preparar la intervención didáctica

Para el diseño de la intervención didáctica con el propósito de revisitar el estudio de las funciones reales de una variable real, con un enfoque dirigido a la educación superior y las aplicaciones que el alumno encontrará en las asignaturas específicas del curso y en su desempeño futuro profesional, seguimos las siguientes siete etapas. Es importante destacar que en los pasos (v) y (vii) se consideran los antecedentes de esta investigación, particularmente en lo que respecta a los obstáculos epistemológicos y las dificultades cognitivas relacionadas con la noción de *función*.

### (i) Identificar un contexto específico de ingeniería civil que requiera la movilización de nociones relacionadas con el concepto de *función real* de una *variable real*

Al contrario de lo recomendado en la fase epistemológica de la TMCC, esta identificación no se basó en el análisis de los libros habitualmente utilizados en las asignaturas específicas (no matemáticas) que conforman el currículo de la carrera. En el caso particular descrito en este artículo, el contexto nos fue presentado por dos ingenieros civiles, quienes plantearon un problema clásico —el análisis dinámico de un pórtico— del análisis dinámico de estructuras, destacando su relevancia para contextualizar el enfoque de la matemática en la carrera de ingeniería civil.

### (ii) Análisis de una referencia bibliográfica relacionada con el contexto identificado para comprender cómo se moviliza la noción matemática pretendida

Una vez planteado el problema, procedemos a analizar una referencia bibliográfica sobre este tema: el libro *Lições em Mecânica das Estruturas* de Mazzilli *et al.* (2016).

Es importante destacar que el análisis dinámico de estructuras, "que se ocupa de la formulación y solución de las ecuaciones de movimiento de sistemas estructurales, en presencia de perturbaciones cinemáticas en su configuración de equilibrio o de acciones que varían en el tiempo" (Mazzilli *et al.*, 2016, p. 26), no es un contexto de interés exclusivo para estudiantes de ingeniería civil. Según los autores del libro analizado, las herramientas desarrolladas para resolver problemas fundamentales en este dominio pueden ser igualmente útiles en cursos de ingeniería mecánica, mecatrónica, naval, química, minas, aeronáutica y aeroespacial, así como en muchos otros donde se requiera el análisis de sistemas estructurales (p. 12). Además, señalan que "el análisis dinámico de estructuras es cada vez más necesario en los proyectos de Ingeniería, ya que los sistemas estructurales se vuelven más delgados y susceptibles a vibraciones" (p. 26).

El problema planteado por los ingenieros civiles se asemeja a algunas de las situaciones discutidas en el capítulo 4, titulado "Vibraciones libres en sistemas de un grado de libertad". Se relaciona específicamente con el caso de un pórtico de un piso en situación de vibración libre subamortiguada, es decir, la estructura, con un cierto índice de amortiguamiento, es sometida a una fuerza estática, lo que provoca un desplazamiento inicial, que posteriormente es retirado abruptamente, lo que provoca que la estructura comience a vibrar libremente con velocidad inicial cero.

Al analizar el enfoque propuesto por Mazzilli *et al*. (2016) para este tipo de situaciones y tras considerar el alcance de una asignatura inicial de cálculo, identificamos la presencia de las siguientes nociones relacionadas con el estudio de la función real de una variable real: el concepto de función, dominio, imagen, representación gráfica, diferentes tipos de funciones elementales (especialmente funciones trigonométricas y exponenciales), operaciones (adición, multiplicación y composición) y transformaciones (translación, reflexión, expansión y contracción) con este tipo de funciones, máximos y mínimos locales de funciones trigonométricas, y funciones dadas por la multiplicación de una función exponencial por una función trigonométrica.

## (III) Análisis de los programas de las asignaturas de matemáticas incluidas en el plan de estudios de ingeniería civil para comprender cómo se retoma la noción de función al principio de este curso

En la fase epistemológica de la TMCC se recomienda realizar un *análisis de los programas de las asignaturas de matemática presentes en la carrera en cuestión* (en nuestro caso, ingeniería civil) con el fin de comprender cómo se prevé el tratamiento del tema y en qué asignaturas se aborda. En el caso de la investigación reportada en este artículo, analizamos en qué asignaturas de los cursos de ingeniería civil que ofrecen las instituciones en las que operamos se espera retomar el estudio de funciones.

En el Instituto Mauá de Tecnología (IMT), se revisan las funciones reales de una variable real al inicio de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral 1, la cual es anual y se imparte en el primer año de la carrera con una carga de trabajo de 160 horas. Según el proyecto pedagógico, el objetivo de esta asignatura es presentar al alumno un tratamiento matemático dedicado exclusivamente al estudio de dos grandes áreas de extrema importancia en la ingeniería: la tasa de variación de cantidades, objeto de estudio del cálculo diferencial, y la acumulación de cantidades, explicada por el cálculo integral. El dominio de estas herramientas es fundamental para el ingeniero, ya que este profesional necesita realizar balances, análisis de variación, determinación de áreas, volúmenes y otras acumulaciones.

Por otro lado, en la Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), se recuperan las nociones relacionadas con el estudio de la función en una asignatura también denominada Cálculo Diferencial e Integral 1, con una carga horaria de 72 horas. A diferencia del Instituto Mauá de Tecnología, esta asignatura se imparte en el segundo semestre del curso. Según el Proyecto Pedagógico, el objetivo específico de esta asignatura es conducir gradualmente al alumno, a lo largo del desarrollo de la asignatura, a: 1) desarrollar habilidades para ser capaz de identificar el objeto función en sus distintas representaciones; 2) adquirir conceptos y técnicas para determinar límites y manejar cuestiones relacionadas con la derivada e integral, y 3) construir modelos matemáticos para resolver problemas que involucren optimización, áreas y volúmenes.

## (IV) Análisis del orden epistemológico relacionado con la función de objeto con el fin de comprender cómo se produjo su desarrollo histórico

.Según Ponte (1990, p. 5), "la noción de función no apareció por casualidad en las matemáticas. Surgió, como tan bien demostró Bento Caraça (1951), como el instrumento matemático indispensable para el estudio cuantitativo de los fenómenos naturales, iniciado por Galileo (1564-1642) y Kepler (1571-1630)". De acuerdo con el mismo autor, se considera uno de los conceptos más importantes de toda la matemática, ya que es la base del cálculo, un área clave en el desarrollo de las matemáticas contemporáneas. La noción de función se desarrolló de manera articulada en la búsqueda de explicar problemas físicos matemáticamente, relacionados, entre otros, con la conducción del calor, la caída libre y los movimientos de los planetas. Esto ocurrió especialmente porque las funciones son "instrumentos por excelencia para estudiar problemas de variación" (Ponte, 1990, p. 5).

Hoy en día, sin embargo, las matemáticas están significativamente vinculadas no solo a la física; sus ámbitos de aplicación se han ampliado a "el estudio de fenómenos y situaciones en ciencias de la vida, ciencias humanas y sociales, gestión, comunicación, ingeniería y tecnología, constituyendo un medio de descripción, explicación, predicción y control" (Ponte, 1990, pp. 5-6). La aplicación de las matemáticas como herramienta analítica en diferentes ámbitos es posible, esencialmente, gracias a la noción de *modelo*, ya que siempre es "de gran interés estudiar los efectos de los distintos parámetros que influyen en la situación, lo que se hace de forma aún más eficiente cuanto más cerca se está de establecer una relación funcional entre cada uno de ellos y las variables fundamentales del modelo" (Ponte, 1990, pp. 5-6). La pertinencia de establecer una relación funcional entre las variables presentes en un determinado modelo revela que "la noción de función es de importancia central en el diseño y estudio de modelos, cualquiera que sea su naturaleza, y por tanto sigue siendo una noción clave en las matemáticas actuales" (Ponte, 1990, pp. 5-6).

## (v) Identificar los obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto de función

Para la construcción de materiales didácticos con el objetivo de contextualizar conceptos matemáticos en diferentes áreas, es importante, también en el dominio de la fase epistemológica de la TMCC, según Camarena y González (2001), y Camarena (2012), identificar los obstáculos epistemológicos, en el sentido de Brousseau (1983), relacionados con un determinado concepto. Tales obstáculos son "aquellos que no podemos ni debemos evitar por su papel constitutivo en el conocimiento objetivo. Pueden encontrarse en la historia de los propios conceptos" (Brousseau, 1983, p. 178. Traducción propia). La necesidad, en la fase epistemológica, de apegarse a ellos, está plenamente justificada, ya que, para el citado autor, la identificación y caracterización de los obstáculos son fundamentales para construir y analizar situaciones didácticas. "La planificación del aprendizaje, basada en el estudio del desarrollo del conocimiento en términos de obstáculos, se diferencia significativamente de la planificación clásica, especialmente en lo que respecta al papel y organización de las situaciones problema, que serán fundamentales en este proceso" (Brousseau, 1983, p. 178).

Específicamente en el caso del objeto matemático función, dieciséis obstáculos epistemológicos han sido estudiados y sintetizados en detalle por Sierpinska (1992). Superar estos obstáculos está ligado a la adquisición de condiciones para comprender la noción de función, como se explica en la tabla 3.

Tabla 3. *Obstáculos epistemológicos y condiciones para entender la noción de función*

| Obstáculo epistemológico | Condiciones para entender la noción de *función* |
|---|---|
| 1. Las matemáticas no se preocupan por problemas prácticos. | Identificación de los cambios observados en el mundo que nos rodea como problemas a resolver; identificación de regularidades en las relaciones entre cambios como forma de afrontar los cambios. |
| 2. Las técnicas de cálculo utilizadas en la producción de tablas de relaciones numéricas no merecen convertirse en objeto de estudio en Matemática. | |
| 3. Considere los cambios como fenómenos, enfocándose en cómo cambian las cosas, ignorando lo que cambia. | Identificación de sujetos que sufren cambios en los casos en estudio. |
| 4. Piense en términos de ecuaciones e incógnitas que se extraerán de ellas. | Discriminación entre dos modos de pensamiento matemático: uno en términos de cantidades conocidas y desconocidas y el otro en términos de cantidades constantes y variables. |
| 5. Considere el orden de las variables como irrelevante. | Discriminación entre variables dependientes e independientes. |
| 6. Una concepción heterogénea del número. | Generalización y síntesis de la noción de número; discriminación entre número y cantidad. |
| 7. Una filosofía pitagórica de número: todo es número. | |
| 8. Las leyes de la Física y las funciones de la Matemática no tienen nada en común; pertenecen a diferentes dominios (compartimentos) del pensamiento. | Síntesis del concepto de ley y el concepto de función; en particular, la conciencia del posible uso de funciones para modelar relaciones entre magnitudes físicas o de otro tipo. |
| 9. La proporción es un tipo privilegiado de relación. | Existe una completa arbitrariedad en la ley de función en su definición. |
| 10. Fuerte creencia en el poder de la operación formal en expresiones algebraicas. | Discriminación entre una función y las herramientas analíticas que a veces se utilizan para describir su ley. |
| 11. Solo las relaciones descritas por fórmulas analíticas deben recibir el nombre de función. | |
| 12. La definición es una descripción de un objeto ya conocido de otra manera, por los sentidos o la percepción. La definición no determina el objeto; en cambio, el objeto determina la definición. | Discriminación entre definiciones matemáticas y descripciones de objetos; síntesis de la concepción general de la función como objeto; discriminación entre los conceptos de función y relación. |
| 13. Las funciones son secuencias. | La discriminación entre las nociones de función y secuencia. |

| Obstáculo epistemológico | Condiciones para entender la noción de *función* |
|---|---|
| 14. Las coordenadas de un punto son segmentos de recta, no números. | La discriminación entre coordenadas de un punto en una curva y segmentos de recta que indican que un punto dado en la curva es una imagen de un elemento en el dominio de alguna función. |
| 15. La gráfica de una función es un modelo geométrico de una relación funcional. No tiene que ser fiel, puede contener puntos *(x, y)* tales que la función no esté definida en *x*. | La discriminación entre diferentes formas de representar funciones y funciones por sí mismas; síntesis de diferentes formas de proporcionar una función, representar una función y hablar de una función. |
| 16. Los cambios en una variable son cambios en el tiempo. | Generalización de la noción de variable; síntesis de los roles de la noción de función y causa en la Historia de la Ciencia: conciencia de que las búsquedas de relaciones funcionales y causales son expresiones del esfuerzo humano por comprender y explicar los cambios en el mundo; discriminación entre las nociones de relaciones funcionales y causales. |

Fuente: elaboración propia a partir de Sierpinska (1992).

## (VI) Análisis de los libros de texto utilizados en las asignaturas iniciales del cálculo diferencial e integral en los cursos de ingeniería

En cuanto a los libros de texto que se utilizan en las instituciones en las que operamos para revisar el estudio de la función —que, como ya hemos señalado, se da en las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral 1, ya que el uso de dichos materiales no es obligatorio y son referenciados en los planes didácticos más como sugerencias para los alumnos—, se optó por analizar dos libros distintos señalados en las referencias básicas de la mencionada asignatura, uno de carácter más tradicional y otro en el que se destaca un enfoque más aplicado de los contenidos. Son, respectivamente, *Cálculo A (funciones, límite, derivación e integración)*, 6.ª edición (2006), de autoría de Diva Marília Flemming y Miriam Buss Gonçalves (indicada en la PUC-SP) y *Cálculo*, 8.ª edición (2017), escrito por James Stewart (nominado en IMT y PUC-SP).

Flemming y Gonçalves (2006) proponen una revisión del estudio de las funciones en el capítulo 2, al que dedican 48 páginas. Las autoras señalan, al comienzo del capítulo 2, que el objetivo es “introducir uno de los conceptos más fundamentales de la Matemática, el de función” (p. 12) y que solo tratan funciones reales de variable real. De acuerdo con ellas, el enfoque aborda problemas que “muestran la importancia de estudiar funciones en diferentes áreas de conocimiento” (p. 12), en especial economía, y que “en el transcurso de los ejemplos es posible observar que el uso de recursos computacionales ayuda a visualizar las propiedades y características de las funciones” (p. 12).

El enfoque se inicia directamente con la presentación de la definición de función, dominio y contradominio, seguido de ejemplos y contraejemplos en los que se utiliza la representación de relaciones mediante diagramas de Venn. Luego, se presentan de nuevo, seguidas de ejemplos, las definiciones de imagen, del conjunto de imágenes y de gráfica. Es importante señalar que, en uno

Nº 56 • Segundo semestre de 2024 • pp. 275- 300
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web
TED

de estos ejemplos, las autoras afirman que "cuando trabajamos con subconjuntos de R, lo habitual es caracterizar la función solo por la fórmula o regla que la define" (p. 14). En nuestra opinión, si esta afirmación no es bien discutida por el profesor en clase, puede reforzar uno de los obstáculos epistemológicos que se muestran en la tabla 3, a saber, el obstáculo 11. Encontramos que, de la página 12 a la página 23, salvo una aplicación de funciones en el contexto de una línea de producción para una determinada pieza, todos los conceptos revisados y los ejercicios propuestos contemplan únicamente el contexto matemático.

Todos los ejercicios propuestos, desde el número 32 hasta el 36, abordan contextualizaciones en diferentes áreas de conocimiento de los conceptos trabajados. Esto se realiza a través de problemas bastante habituales en los libros de cálculo. En esta primera parte del enfoque de contenido, se proponen 36 ejercicios, de los cuales siete mencionan el uso de recursos tecnológicos.

Después de los ejercicios, las autoras inician una nueva sección en la que trabajan con lo que llaman *funciones especiales*: constantes, identidad, función polinomial de primer grado, modular, función polinomial de segundo grado y polinomial de cualquier grado, y racional. Luego, hacen consideraciones sobre funciones pares e impares, funciones periódicas y funciones inversas, y abordan lo que ellas llaman funciones elementales: exponencial, logarítmica, trigonométrica, trigonométrica inversa, hiperbólica e hiperbólica inversa. Todo este enfoque se realiza siguiendo la línea de definición y ejemplos utilizando únicamente el contexto matemático.

La parte teórica del capítulo 2 finaliza con un apartado titulado "Aplicaciones". Luego, se presentan diez ejemplos de contextualización de la noción de función, ocho relacionados con la economía, uno con el crecimiento de la población y uno con la desintegración radiactiva. Al final del capítulo se proponen 59 ejercicios sobre todo el contenido trabajado. En diez de estos ejercicios hay una indicación para el uso de recursos tecnológicos. Relacionado con contextos que no son exclusivamente matemáticos, existen 15 problemas de áreas similares a las contempladas en los ejemplos en el apartado de "Aplicaciones" y, curiosamente, ninguno de ellos menciona el uso de tecnologías, aunque, en muchos, se solicita la construcción de representaciones gráficas.

Respecto al libro de Stewart (2017), en el prefacio, el autor destaca que el "énfasis está en la comprensión de los conceptos. Creo que casi todo el mundo está de acuerdo en que este debería ser el principal objetivo de la enseñanza de Cálculo" (Stewart, 2017, p. IX). También hay una preocupación del autor con la presentación, ejemplos y ejercicios presentes en el texto, con el uso de datos reales. En el prefacio, el autor también destaca el uso de tecnologías como recurso auxiliar para el uso del libro por parte de estudiantes y profesores.

Con relación específica al capítulo inicial, titulado "Funciones y modelos", en el que se propone revisar el estudio de las funciones, aún en el prefacio, el autor afirma que, al abordar este tema,

> desde el principio, se valora la multiplicidad de representaciones de una función: verbal, numérica, visual y algebraica. La discusión de modelos matemáticos conduce a una revisión de las funciones usuales, incluidas las funciones exponenciales y logarítmicas, a través de estos cuatro puntos de vista. (p. XII)

También destacamos algunas palabras que Stewart dirige a los estudiantes que utilizan su texto. Afirma que, aunque algunos alumnos prefieren

> ir directamente a ejercicios pasados como actividad para casa, consultando el texto solo cuando encuentran alguna dificultad, creo que leer y comprender todo el apartado antes de abordar los ejercicios es mucho más interesante. Debes prestar especial atención a las definiciones y comprender el significado exacto de los términos. (p. xx)

Además, da consejos al estudiante que, a nuestro juicio, están directamente relacionados con la potencialidad de que, en un curso de ingeniería, la matemática también desempeña el papel de materia formativa, como destaca Camarena (2011). El autor afirma que "parte del objetivo de este curso es formarte para pensar con lógica. Trata de escribir las etapas de la resolución de manera articulada, paso a paso, con frases explicativas, y no solo una serie de ecuaciones y fórmulas desconectadas" (Stewart, 2017, p. xx).

La revisión del estudio de las funciones se realiza en el capítulo 1, titulado "Funciones y modelos". Para ello, el autor asigna 63 páginas, organizadas en cinco secciones, una revisión y un tema titulado "Principios de resolución de problemas". En consonancia con lo resaltado en el prefacio, el acercamiento al tema se inicia mediante una fotografía que ilustra la destrucción provocada por un terremoto en Japón en 2011 y una representación gráfica de la aceleración vertical del suelo provocada por ese terremoto.

En la primera sección, "Cuatro formas de representar una función", a partir de situaciones en diferentes áreas que involucran una cantidad que depende de otra, el autor conceptualiza una función y destaca que trabajará con funciones reales de una variable real. Luego presenta las nociones esenciales relativas a la idea de función y de su gráfica. Estas nociones se ilustran mediante ejemplos que se encuentran comúnmente en los libros de texto y en un contexto estrictamente matemático.

Se proponen 80 ejercicios; de estos, 29 son aplicaciones de conceptos trabajados en diferentes contextos. Tanto en cuestiones puramente matemáticas como en las de aplicación, el autor explora a fondo las representaciones gráficas. No se menciona en este primer apartado el uso de recursos tecnológicos.

La segunda sección del capítulo, llamada "Modelos matemáticos: una lista de funciones especiales", comienza con el concepto de un modelo matemático, la presentación de un esquema que ilustra el proceso de modelación matemática y la observación de que un modelo matemático "nunca es una representación completamente precisa de una situación, es una idealización" (p. 15. Énfasis del autor).

Luego, el autor comienza a discutir modelos lineales, utilizando ejemplos contextualizados de diferentes naturalezas: el primero, que trata de la temperatura del aire seco en función de la altitud, informa *a priori* que un modelo lineal describe adecuadamente el problema; el segundo, relacionado con los niveles promedio de dióxido de carbono en la atmósfera, es un ejemplo de lo que el autor llama un *modelo empírico*, construido completamente a partir de datos recopilados y utilizando la búsqueda de una curva que se ajuste mejor a los datos. En el planteamiento de este segundo ejemplo, se presenta incluso una discusión sobre un refinamiento del modelo mediante una regresión lineal que el autor sugiere realizar con la ayuda de una calculadora gráfica o *software* como *Maple* y *Mathematica*.

En el tercer ejemplo propuesto, se retoma la situación anterior para abordar el uso del modelo obtenido para realizar predicciones. Esto exige recurrir a interpolaciones y extrapolaciones con relación al conjunto de datos previamente puesto a disposición. Los siguientes modelos discutidos en la sección son aquellos que el autor llama *funciones potencia*, que incluyen algunos casos de funciones polinomiales, la función raíz y la función recíproca —representada algebraicamente por  que, como se señaló, está presente en física y química en relación con la Ley de Boyle (siendo la temperatura constante, el volumen de un gas es inversamente proporcional a la presión)—. Enseguida se definen funciones racionales (con ayuda de un único ejemplo puramente matemático) y funciones algebraicas, mencionando que un ejemplo de aplicación de este tipo de función está presente en la teoría de la relatividad en la que la masa de una partícula en relación con su velocidad se expresa mediante una función algebraica.

Luego, se aborda superficialmente el tema de las funciones trigonométricas, ya que se pretende dedicar un apartado completo a su revisión detallada —al analizar este material, nos percatamos de que la revisión propuesta es principalmente técnica y que solo se trabajan y proponen situaciones puramente matemáticas—. En esta sección, se examinan las funciones seno, coseno y tangente, se presentan sus dominios, imágenes, representaciones gráficas, y se resalta su carácter periódico. Con respecto a este aspecto particular, se destaca que "la naturaleza periódica de estas funciones las hace adecuadas para modelar fenómenos repetitivos, como las mareas, las cuerdas vibrantes y las ondas sonoras" (p. 22). La sección concluye con 32 ejercicios propuestos, 21 de los cuales son aplicaciones en diferentes contextos de las funciones tratadas. En 8 de estos 21 ejercicios de aplicación, se indica por parte del autor la necesidad de que el alumno utilice una calculadora gráfica o una computadora.

En la tercera sección del capítulo, titulada "Nuevas funciones a partir de conocidas", el autor afirma que, a partir de las funciones básicas definidas en la sección anterior, se obtendrán nuevas funciones mediante desplazamientos, ampliaciones o reflexiones de sus gráficas. Además, se discutirá cómo combinar funciones mediante operaciones aritméticas ordinarias y composiciones. En el tema de "Transformaciones de funciones", se abordan las translaciones (desplazamientos verticales y horizontales), reflexiones y expansiones horizontales y verticales. De los cinco ejemplos trabajados, solo uno no tiene un contexto puramente matemático (modelación de la duración de la luz solar en una ciudad de una latitud determinada). En el tema de "Combinaciones de funciones", el autor examina las operaciones aritméticas y la composición entre funciones utilizando únicamente el contexto matemático. La sección concluye con 66 ejercicios propuestos, 11 de los cuales son aplicaciones en contextos no estrictamente matemáticos. En ninguno de los ejercicios se sugiere el uso de recursos tecnológicos.

En la sección de "Funciones exponenciales", el autor define este tipo de función, revisa las propiedades de los exponentes y luego analiza algunas de sus aplicaciones.

Se destaca que este tipo de función se encuentra frecuentemente en modelos matemáticos de la naturaleza y de la sociedad, y que en este momento se abordarán aplicaciones relacionadas con el crecimiento poblacional y la desintegración radiactiva. En los otros capítulos se exploran más ejemplos de aplicaciones. Finalmente, cerrando el apartado, se proponen 38 ejercicios, de los cuales 16 requieren el uso de recursos tecnológicos. De estos 38 ejercicios, nueve tienen aplicaciones en contextos distintos de los puramente matemáticos.

La quinta sección del capítulo, titulada "Funciones inversas y logaritmos", se introduce a partir de una situación relacionada con la población de un cultivo bacteriano. El apartado concluye con 77 ejercicios propuestos, cinco de los cuales se aplican en diferentes contextos. Entre los ejercicios propuestos, hay nueve en los que es necesario el uso de calculadoras gráficas o computadoras, y dos en los que se deben utilizar sistemas algebraicos computacionales.

Después de la quinta sección, se realiza una revisión de los conceptos trabajados en el capítulo. En esta parte se proponen 28 ejercicios, cuatro de los cuales son aplicaciones. Hay un ejercicio que requiere el uso de una calculadora gráfica o una computadora. El capítulo concluye con un tema denominado "Principios de resolución de problemas", siguiendo las recomendaciones de George Polya.

## (VII) Análisis de los aspectos cognitivos relacionados con la noción de *función*

Esta etapa se enfoca en el *análisis de los aspectos cognitivos* relacionados con el contenido matemático que estamos abordando, en este caso, la función, con el objetivo de comprenderlos a partir de investigaciones y reflexionar sobre cuestiones cognitivas vinculadas al aprendizaje de determinados contenidos, así como sobre algunas barreras que enfrentan los estudiantes en este proceso. En la tabla 4, se resumen las principales dificultades que enfrentan los estudiantes al estudiar el concepto de función, las cuales fueron presentadas por autores de diversos estudios: Markovits *et al.* (1994), Oliveira (1997), García-Quiroga *et al.* (2004), Igliori (2007), López y Sosa (2008), Akkoç y Tall (2002), Dubinsky y Wilson (2013), a partir de la revisión de trabajos de diferentes autores producidos entre 1960 y 2011, y Brendefur *et al.* (2015), a partir de la revisión de diversos trabajos.

Tabla 4. Resumen de las dificultades que enfrentan los estudiantes con relación al aprendizaje de función

| Dificultades con relación al concepto de *función* |
|---|
| 1. Comprensión de los términos: par ordenado, dominio, contradominio, conjunto de imágenes y distinción entre conjunto de imágenes y contradominio. |
| 2. La no percepción de que, en la representación gráfica, el eje de abscisas representa el dominio de la función y el eje de ordenadas el contradominio y también la no percepción de que los puntos de la representación gráfica de una función representan los pares  donde  es un elemento del dominio e  es la imagen de *x* por la función considerada. |
| 3. No establecer conexiones entre los componentes de la definición verbal de función y los componentes de la representación gráfica visual. |
| 4. Identificar el par ordenado compuesto por un elemento del dominio y su imagen respectiva para funciones dadas en forma algebraica cuando se proporciona el valor de la imagen y se desea el valor del dominio correspondiente. |
| 5. Ignorar el dominio y el contradominio de una función. |
| 6. No comprender algunas funciones: constante (debido a que todos los elementos del dominio tienen la misma imagen y la definición formal de función se percibe como variación); aquellas que tienen representaciones gráficas desconectadas; las que son definidas por partes. |
| 7. Trabajar con las diferentes representaciones de una función y las actividades semióticas vinculadas a ellas, como la transposición de problemas del lenguaje escrito al lenguaje algebraico, representar gráficamente y analizar una función, actividades que involucren la conversión de representaciones semióticas, especialmente aquellas que requieran el paso de una representación en el registro gráfico a una representación en el registro algebraico, pasando por diferentes representaciones, como tablas, expresiones y gráficas. |
| 8. Trabajar con la simbología relacionada con el concepto de función. Los estudiantes a menudo no comprenden el concepto de variable y la notación ; es posible que no comprendan la distinción entre  y encuentren los valores de  para los cuales . |
| 9. Idea de que basta con que los datos se puedan representar gráficamente o mediante una ecuación para enfrentar una relación funcional (es decir, dificultad para diferenciar función de ecuación). |
| 10. Dificultad para diferenciar la variable dependiente de la variable independiente. |
| 11. Falsa idea de que una parábola siempre representa una función, sin importar si su eje de simetría es horizontal o vertical. |
| 12. Falsa idea de que una gráfica solo puede representar una función si se conoce su expresión algebraica. |
| 13. La gráfica de una función debe ser continua y la noción de continuidad como algo que no se interrumpe. |
| 14. La gráfica de una función debe ser lineal cuando se le pide que la dibuje con dos puntos fijos. |
| 15. Distinguir entre variable e incógnita. |
| 16. Enunciar fenómenos o situaciones que impliquen una relación funcional entre variables. |
| 17. Enunciar la regla de correspondencia que enumera los elementos de dos conjuntos en los que se define una función. |
| 18. Obtener la inversa de una función y su representación gráfica. |
| 19. No hacer explícito el carácter unívoco de la relación funcional. |
| 20. Cuando se les presenta la noción de función, los estudiantes aportan su comprensión implícita del lenguaje y todas sus experiencias previas los respaldan. El resultado es un conjunto muy complicado de significados personales que ayudan y dificultan su interpretación del concepto de función. |
| 21. Creer que todas las funciones se pueden representar usando una expresión algebraica. |
| 22. Comprender por qué la univalencia es un requisito importante para definir una función. |
| 23. Confusión considerable entre la condición de univalencia en la definición de función y la condición de unicidad en la propiedad uno a uno (cada elemento del dominio está asociado con un elemento diferente del contradominio) no necesaria para definir una función. |
| 24. Dificultad para comprender claramente la composición y descomposición de funciones. |
| 25. El conocimiento sobre las funciones tiende a estar fragmentado. |
| 26. Incapacidad para percibir funciones como objetos abstractos de alto nivel. |

Fuente: elaboración propia.

Como resultado de los análisis realizados en las siete etapas previamente presentadas en la fase epistemológica de la TMCC, se ha desarrollado una intervención didáctica que se explica en el siguiente apartado. Se ha elegido como contexto para la intervención el análisis dinámico de un pórtico (etapa I) e identificamos, a partir de una referencia bibliográfica comúnmente utilizada en ingeniería civil para estudiar este tema, cómo se movilizan los conceptos matemáticos, especialmente los diferentes tipos de funciones (etapa II).

Observamos que, a diferencia de lo que está presente en los problemas de la mayoría de los libros de cálculo, en el análisis dinámico de estructuras, y sin duda en aplicaciones en otros campos, las situaciones no involucran solo un tipo de función; por el contrario, exigen la movilización articulada de distintas funciones y un amplio conjunto de nociones relacionadas con estos objetos matemáticos. En consecuencia, una intervención didáctica orientada a revisar el estudio de las funciones a través de una situación contextualizada en la ingeniería, revisión que en las instituciones donde enseñamos se da en la asignatura inicial de cálculo diferencial e integral (como se detalla en la etapa III), debe permitir al alumno desarrollar la capacidad de trabajo de forma integrada con los conceptos relacionados con la función.

El problema elegido para la intervención también debe permitir al alumno percibir por qué históricamente el desarrollo de la noción de función (etapa IV) fue importante para diferentes áreas del conocimiento y por qué esto ocurrió de manera articulada a la búsqueda de la expresión matemática de situaciones reales que implican variaciones. Además, deberá proporcionar una familiarización inicial con una idea fundamental relacionada con las funciones: el estudio de modelos. Además, a nuestro juicio, la intervención tendría un mayor impacto en la formación del futuro ingeniero si permitiera enfrentar algunos de los obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto de función (etapa V), superarlos y, en consecuencia, brindar condiciones para comprender diferentes aspectos esenciales para la noción de *función*.

Respecto a los libros de texto de Cálculo de Flemming y Gonçalves (2006), y Stewart (2017), que son de uso común o al menos referenciados como bibliografía básica en las instituciones donde impartimos docencia (analizados en la etapa VI), consideramos que ambos podrían servir como material de apoyo para la intervención elaborada, para el desarrollo, incluso recurriendo al uso de recursos tecnológicos, de habilidades más técnicas relacionadas con el estudio de la función.

Como soporte para la expansión del conocimiento sobre las aplicaciones de la función en diferentes áreas del conocimiento, el libro de Stewart (2017) se muestra más efectivo, ya que las situaciones que exploran contextos no estrictamente matemáticos están presentes en mayor número y contemplan una mayor diversidad de áreas en comparación con el de Flemming y Gonçalves (2006), en el que las aplicaciones están muy restringidas a la economía. Otro aspecto a destacar es que en Flemming y Gonçalves (2006) no se menciona el uso de recursos tecnológicos para abordar problemas contextualizados, mientras que en Stewart (2017) hay un número significativo de preguntas de esta naturaleza en las que, según el autor, es necesario utilizar calculadoras gráficas, computadoras y en algunos casos sistemas computacionales algebraicos.

Finalmente, el análisis realizado muestra la importancia de considerar, al diseñar la intervención, cuáles son las principales dificultades que enfrentan los

Nº 56 • Segundo semestre de 2024 • pp. 275- 300
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web
TED

estudiantes al estudiar el concepto de función (etapa VII) y luego brindarles oportunidades para minimizarlas. Por lo tanto, procedemos a presentar la intervención.

## Resultados y análisis: la intervención didáctica

La intervención didáctica fue planificada para ser aplicada en 12 horas en total, distribuidas en 3 semanas, con 4 horas de aula en cada semana. A continuación, se presenta el problema que contextualiza la intervención propuesta.

Considere un pórtico con masa $m$ = 384 kg, rigidez de cada columna $\frac{k}{2}$ =19200 N/m y tasa de amortiguamiento $\xi = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} =$ 0,05, siendo $c$ la constante de amortiguamiento. Se aplica una fuerza estática a esta estructura, lo que provoca un desplazamiento inicial $u_0 = 0{,}1$m. Luego, esta fuerza se elimina abruptamente y la estructura comienza a vibrar libremente con velocidad inicial cero. Considerando únicamente la posibilidad de desplazamiento horizontal de este pórtico, la expresión que permite analizar el comportamiento del desplazamiento $u$ con relación al tiempo viene dada por:

$$u(t) = 0{,}10e^{-0{,}5t}\,[\cos(10t - 0{,}05)]$$

Pregunta: ¿La amplitud de movimiento será el 20 % del rango inicial después de cuántos ciclos?

Nota: considere dos decimales para los cálculos.

Destacamos que el modelo matemático que describe el problema mencionado implica una ecuación diferencial ordinaria (EDO) homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Sin embargo, dado que nuestra intención al diseñar la intervención es trabajar con estudiantes de una asignatura inicial de cálculo diferencial e integral, adaptamos el problema de manera que ya se proporciona la expresión que describe el desplazamiento horizontal del pórtico en función del tiempo, y no se requiere que el alumno resuelva la mencionada EDO.

Posteriormente, a través de las tablas 5 a 11, explicamos la planificación que hemos preparado para cada una de las semanas que componen la intervención y sus respectivas clases. Es importante mencionar que las observaciones en la tercera columna de cada una de estas tablas, titulada “Consideraciones generales”, son el resultado de nuestra interpretación, de nuestras experiencias profesionales como docentes de cálculo diferencial e integral y del conocimiento de las realidades de los estudiantes de las instituciones donde enseñamos. Por lo tanto, es evidente que los docentes que trabajan en otros contextos pueden identificar, especialmente en lo que respecta a dificultades cognitivas, aspectos diferentes a los mencionados en estas tablas. Además, cada vez que se lleva a cabo la intervención, la planificación puede ajustarse o incluso modificarse según las situaciones observadas. Durante la realización de la intervención, el docente debe estar siempre atento para explorar, en el momento más adecuado de la secuencia de clases, otros conceptos que surjan de las discusiones, aunque no estén previstos, pero que son relevantes para alcanzar los objetivos.

**Tabla 5.** *Planificación para la clase 1 (primera semana de la intervención)*

| Clase 1: propuesta del problema, disponibilidad de materiales para la preparación previa de los estudiantes para la inmersión en el tema y para la realización de una investigación libre relacionada con el contexto del problema. | | |
|---|---|---|
| Pregunta | Objetivo | Consideraciones Generales |
| **Pregunta 1**: ¿La relación presente en el enunciado del problema se refiere a algún(unos) concepto(s) matemático(s) que ya haya estudiado? ¿Cúal(es)? | Realizar una encuesta sobre qué conocimientos matemáticos identifica el estudiante al analizar la expresión algebraica de . | Esperamos que el alumno haga referencia a las ideas de función y, especialmente, a funciones trigonométricas, exponenciales y también a multiplicación de funciones. Es posible mencionar las ideas de funciones constantes y composición de funciones.<br>La discusión de este tema permite comenzar a abordar los obstáculos epistemológicos identificados en la tabla 3 por los números 1 y 8. |
| Tarea | Objetivo | Consideraciones Generales |
| **Tarea 1**: Investigue y lleve a la siguiente clase otra situación (de su interés, de la vida cotidiana, de Física, Ingeniería, etc.) que esté modelada por una función real de una variable real. | Permitir que las actividades que se realicen por parte de los alumnos de la siguiente clase se desarrollen en el contexto de situaciones que ellos mismos han identificado y que, por tanto, pueden estar más cerca de sus intereses. | Al realizar la tarea, el alumno puede encontrarse con los obstáculos epistemológicos identificados en la tabla 3 por los números 1, 8, 11 y 16.<br>Algunas dificultades relacionadas con el concepto de función identificadas en la tabla 4 pueden constituir obstáculos para el alumno al momento de realizar esta tarea. Estas se indican con los números 3, 6, 9, 12, 13, 16, 20, 21, 22 y 23. |

**Fuente:** elaboración propia.

**Tabla 6.** *Planificación para la clase 2 (primera semana de la intervención)*

| Clase 2: *Iniciar la revisión del estudio de funciones.* | | |
|---|---|---|
| Pregunta | Objetivo | Consideraciones Generales |
| **Pregunta 2**: ¿Se pueden representar las funciones identificadas en la Tarea 1 mediante una expresión algebraica? ¿Qué dominios, contradominios, imágenes y subconjuntos de estos conjuntos deben considerarse teniendo en cuenta el contexto de la situación que se modela? Obtener diferentes representaciones para estas funciones, utilizando *softwares* para la construcción de representaciones gráficas. | Revisar, a partir de las situaciones identificadas por los alumnos con la realización de la Tarea 1, los principales aspectos relacionados con la noción de función. | Los obstáculos epistemológicos que pueden enfrentar los alumnos al contestar la Pregunta 2 se identifican en la tabla 3 con los números 1, 3, 5, 8, 11, 15 y 16.<br>Sobre las dificultades cognitivas que pueden enfrentar los alumnos al contestar la Pregunta 2, destacamos las indicadas en la tabla 4 por los números 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 17, 20, 21, 22, 23 y 25. |
| **Pregunta 3**: ¿Cuáles son los conjuntos de dominios, contradominios e imágenes de la función $u$, considerando exclusivamente el contexto matemático? ¿Y si consideramos el contexto del problema? | Permitir al alumno trabajar, en el contexto del problema de análisis dinámico del pórtico, con los conceptos ya estudiados en la escuela básica y que fueron retomados en esta clase. | En esta pregunta, el alumno puede enfrentar el obstáculo epistemológico identificado por el número 3 en la tabla 3.<br>En cuanto a las dificultades cognitivas, pueden estar relacionadas con los números 1, 5, 8, 10, 20 y 25 de la tabla 4. |
| **Pregunta 4**: Usando un *software*, grafique la función  y a partir de esa representación gráfica confirme lo que observó en la Pregunta 3. | | Los obstáculos epistemológicos que se pueden enfrentar en esta Pregunta son los números 14 y 15 de la tabla 3.<br>Por su parte, las dificultades cognitivas que pueden constituir obstáculos para el alumno son las señaladas en la tabla 4 con los números 2, 5, 7, 14, 20 y 25. |

Nº 56 • Segundo semestre de 2024 • pp. 275- 300
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web
TED

| Tarea | Objetivo | Consideraciones Generales |
|---|---|---|
| Tarea 2: Investigar cómo se llegó a la función que modela el desplazamiento horizontal del pórtico con relación al tiempo. | Permitir al alumno observar que, para llegar al modelo del desplazamiento horizontal del pórtico con relación al tiempo, se necesita una serie de conocimientos matemáticos y físicos con los que trabajará en las asignaturas de estas áreas de conocimiento, normalmente insertado en los ciclos básicos de los cursos de Ingeniería. | Esta Tarea 2 puede iniciar la toma de conciencia del estudiante sobre la importancia del conocimiento de Matemática y Física que se estudia en las asignaturas básicas para modelar y resolver problemas específicos de Ingeniería. |

Fuente: elaboración propia.

Con respecto a esta primera semana de clases, presentada en las tablas 5 y 6, nos gustaría destacar el tema de los materiales destinados a la preparación previa del alumno con el fin de familiarizarlo con el contexto del problema mencionado en la tabla 6. En el caso específico de esta intervención, se produjeron dos videos por ingenieros civiles y físicos que colaboran con nosotros. En estos videos, se presentan las principales ideas relacionadas con los pórticos en un lenguaje accesible para los alumnos principiantes, además de una revisión del modelo masa-resorte ya estudiado por los alumnos de *Ensino Médio* (destinado al grupo de edad de 15 a 17 años), relacionándolo con el contexto del análisis dinámico de estructuras y, en particular, con los pórticos. También como material de apoyo, sugerimos la elaboración de un texto por ingenieros o físicos sobre las nociones de amortiguamiento, coeficiente de amortiguamiento, frecuencia natural, frecuencia natural amortiguada de una estructura y ángulo de fase del movimiento armónico.

Tabla 7. *Planificación para la clase 3 (segunda semana de la intervención)*

| Clase 3: Reanudación y discusión de la Actividad 2 y revisión de las funciones elementales. | | |
|---|---|---|
| **Pregunta** | **Objetivo** | **Consideraciones Generales** |
| Pregunta 5: En la expresión algebraica ¿identifica la presencia de funciones elementales? ¿Cuáles son? | Iniciar un trabajo para retomar el estudio de las funciones elementales a partir de una percepción inicial de los propios alumnos, a partir de la función presente en el problema del pórtico. | En cuanto a los obstáculos epistemológicos, entendemos que este tema no introduce nada nuevo, pero puede contribuir a la continuidad del proceso de confrontación de los anteriormente mencionados.<br>En cuanto a las dificultades cognitivas que pueden presentarse, mencionamos las indicadas en la tabla 4 por los números 6, 8, 20, 24, 25 y 26. |
| **Tarea** | **Objetivo** | **Consideraciones Generales** |
| Tarea 3: Ejercicios elaborados por el docente (siempre que sea posible considerando situaciones contextualizadas, pero sin excluir la posibilidad de preguntas que trabajen solo con el contexto matemático) para que los alumnos puedan repasar y reforzar conocimientos sobre las siguientes funciones elementales: constante, polinomial, racional, modular, definida por partes y logarítmicas, sus operaciones y transformaciones. | Ayudar principalmente a aquellos alumnos que tuvieron poco o ningún contacto con el estudio de las funciones elementales en lo *Ensino Médio*. | En cierto sentido, los ejercicios propuestos para la asimilación de lo que fue trabajado en la clase pueden contribuir a que los alumnos sean capaces de seguir con mayor eficacia el curso que se desarrollará, ya que habrán podido recuperar algunos de los conocimientos previos necesarios. Para proponer estos ejercicios, el docente, luego de un análisis crítico y cuidadoso de los libros utilizados como referentes en la asignatura, podrá seleccionar algunas preguntas propuestas en estos materiales, cuidando de incluir aquellas que demanden el uso de recursos tecnológicos. |

Fuente: elaboración propia.

Tabla 8. *Planificación para la clase 4 (segunda semana de la intervención)*

| Clase 4: Revisa las funciones elementales (continuación) y las operaciones o transformaciones que las involucran. | | |
|---|---|---|
| Pregunta | Objetivo | Consideraciones Generales |
| Pregunta 6: La función  se obtuvo a partir de operaciones o transformaciones que involucran funciones elementales. Identifique estas funciones, operaciones o transformaciones. | Desencadenando, a partir de la función  presente en el problema del pórtico, el planteamiento de dos tipos de funciones elementales, sus operaciones y transformaciones no trabajadas en la clase anterior, a saber: funciones exponenciales y trigonométricas. | En cuanto a los obstáculos epistemológicos, entendemos que este tema no introduce nada nuevo, pero puede contribuir a la continuidad del proceso de confrontación de los anteriormente mencionados. En cuanto a las dificultades cognitivas que pueden presentarse, mencionamos las indicadas en la tabla 4 por los números 6, 8, 20, 24, 25 y 26. |
| Tarea | Objetivo | Consideraciones Generales |
| Tarea 4: Ejercicios elaborados por el docente (siempre que sea posible considerando situaciones contextualizadas, pero sin excluir la posibilidad de preguntas que trabajen solo con el contexto Matemático) para que los alumnos puedan repasar y reforzar conocimientos sobre las funciones elementales (exponencial y trigonométrica), sus operaciones y transformaciones. | Idéntica a la Tarea 3, pero ahora considerando funciones exponenciales y trigonométricas. | Idénticas a las realizadas para la Tarea 3. |

Fuente: elaboración propia.

Con relación a las clases de la semana 2, cuyo esquema presentamos en las tablas 7 y 8, queremos destacar que esta semana se ha planificado la intervención de manera que, a partir de las respuestas proporcionadas por los alumnos a las preguntas 5 y 6, se realice un enfoque didáctico. Este enfoque no se centrará en la forma en que estos contenidos han sido previamente estudiados en *Ensino Médio*, sino que estará dirigido hacia sus futuros trabajos en ingeniería, utilizando un enfoque computacional. Se abordará la idea de funciones elementales (constante, polinómica, racional, modular, definida por partes, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas), así como operaciones (adición, multiplicación y composición) y transformaciones (translación, reflexión, expansión y contracción) aplicadas a este tipo de funciones.

Nº 56 • Segundo semestre de 2024 • pp. 275- 300
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web

Tabla 9. *Planificación para la clase 5 (tercera semana de la intervención)*

Clase 5: Aplicar el conocimiento construido y resolver el problema propuesto, es decir: obtener de la función *u* cuya expresión algebraica $u(t) = 0{,}10e^{-0{,}5t}$ [cos(10*t* – 0,05)] después de cuántos ciclos la amplitud del movimiento horizontal del pórtico será el 20 % de la amplitud inicial.

| Pregunta | Objetivo | Consideraciones Generales |
|---|---|---|
| Pregunta 7: Representar, en el mismo sistema cartesiano, gráficamente las funciones cuyas expresiones algebraicas están dadas por y . | Primero, para revisar, con el apoyo de Tecnologías Digitales de Información y Comunicación [TDIC], las discusiones sobre funciones exponenciales y trigonométricas. Un segundo objetivo es obtener la representación gráfica de la función  para que el alumno pueda tener subsidios para responder la Pregunta 8. | Los obstáculos epistemológicos que se pueden enfrentar y las dificultades cognitivas que pueden enfrentar los alumnos son los mismos ya señalados en las otras actividades que demandan la construcción de representaciones gráficas. Cabe mencionar que, al trabajar con esta pregunta, los estudiantes podrán movilizar conocimientos relacionados con los siguientes aspectos: representaciones algebraicas, representaciones gráficas, dominio, imagen, ceros de funciones, período y amplitud de funciones trigonométricas, y representaciones gráficas de funciones asociadas con funciones elementales e $p(x)=e^{x_e}$ $q(x) = \cos(x)$. Además, al analizar la representación gráfica de *g*, posiblemente se empiece a percibir la necesidad de un factor de amortiguamiento (que, más adelante, comprenderá que está ligado al papel de la función exponencial *f*) en la expresión algebraica de *u*. |
| Pregunta 8: ¿Cuál sería la respuesta al problema si la función  no fuera el enunciado del problema, sino $u(t) = g(t) = \cos(10t - 0{,}05)$? | Mostrarle al alumno de que si la función  fuera de hecho una función trigonométrica, el movimiento horizontal del pórtico nunca cesaría. | En esta pregunta, el estudiante puede notar que la función  que describe este movimiento no puede ser periódica. En cuanto a los obstáculos epistemológicos a afrontar, destacamos especialmente el número 8 de la tabla 3. En cuanto a las dificultades cognitivas, destacamos las indicadas en la tabla 4 por los números 3, 24, 25 y 26. |
| Pregunta 9: ¿Cómo podrían obtener la expresión algebraica de la función *u* a partir de las funciones *f* y *g*? | Reanudar, de forma vinculada al contexto del problema, desde un punto de vista gráfico, el producto de funciones. | En esta pregunta, el estudiante puede percibir que la función *u* es el producto de las funciones *f* y *g* y analizando las representaciones de estas dos funciones, debe producir un esquema de la representación gráfica de la función producto (*u*). En cuanto a los obstáculos epistemológicos, no existen otras consideraciones que las ya presentadas en las otras preguntas. A su vez, entendemos que las dificultades cognitivas que pueden constituir obstáculos en esta materia son las señaladas por los números 7, 25 y 26 de la tabla 4. |
| Pregunta 10: ¿De lo que observaron en la pregunta 9, tiene sentido que la expresión que modela el comportamiento del desplazamiento en función del tiempo viene dada por: $u(t) = 0{,}10e^{-0{,}5t}$ [cos(10*t* – 0,05)]? Justifique tu respuesta. | Permita que los alumnos se den cuenta, a partir de la representación gráfica que construyeron en la pregunta 9, que, al contrario de lo que sucedería si $u = g$, siendo *u* el producto de *f* por *g*, a medida que crecen los valores de *t*, los valores de *u*(*t*) se acercan mucho a cero, es decir, el movimiento horizontal del pórtico tiende a cesar. | En esta pregunta, existe la posibilidad de enfrentar el obstáculo epistemológico indicado en la tabla 3 por el número 8. A su vez, el alumno puede, al resolver la pregunta, enfrentarse a obstáculos relacionados con las dificultades cognitivas señaladas por los números 4, 7, 24, 25 y 26 de la tabla 4. |

| Tarea | Objetivo | Consideraciones Generales |
|---|---|---|
| **Tarea 5:** Investigar sobre las aplicaciones de las funciones periódicas en Física e Ingeniería y también sobre las nociones de pseudoperíodo y amplitud y sus aplicaciones en las áreas mencionadas. | Permita que los alumnos revisen o desarrollen conocimientos que serán esenciales para los temas en los que se trabajará en la próxima clase para la solución efectiva del problema del pórtico. | A través de esta tarea se pueden abordar especialmente los obstáculos epistemológicos señalados en la tabla 3 por los números 1, 8 y 16. Las dificultades cognitivas del alumno para realizar la actividad pueden ser las indicadas por los números 13, 16, 17, 25 y 26 de la tabla 4. |

**Fuente:** elaboración propia.

Tabla 10. *Planificación para la clase 6 (tercera semana de la intervención)*

| **Clase 6:** Aplicar el conocimiento construido y resolver el problema propuesto, es decir: obtener de la función cuya expresión algebraica es $u(t) = 0{,}10e^{-0{,}5t}\,[\cos(10t - 0{,}05)]$, después cuántos ciclos la amplitud del movimiento horizontal del pórtico será el 20 % de la amplitud inicial (continuación). | | |
|---|---|---|
| Pregunta | Objetivo | Consideraciones Generales |
| **Pregunta 11:** Usando GeoGebra, grafiquen las funciones $u$ y $g$ en el mismo sistema cartesiano. Comparen las representaciones gráficas de $u$ y de $g$, buscando similitudes y diferencias entre los comportamientos de tales funciones. | Permita que el alumno reanude la representación gráfica de la función construida en la pregunta 4 y luego, representando en el mismo sistema cartesiano también la función $g$, pueda observar similitudes y diferencias entre dichas funciones. | En esta pregunta, esperamos que el alumno destaque, entre otros aspectos, que: el máximo y mínimo local de $u$ y de $g$ ocurren para los mismos valores de $t$; los ceros de estas funciones coinciden; la amplitud de la función $u$ no es constante, a diferencia de la amplitud de $g$; la función $g$ es periódica, mientras la función $u$ puede clasificarse como pseudoperiódica, una característica que se puede explorar más a fondo en la Pregunta 15. En cuanto a los obstáculos epistemológicos que pueden estar presentes, no tenemos más consideraciones que las ya mencionadas. Las dificultades cognitivas que pueden presentarse son las indicadas por los números 4, 7, 20, 25 y 26 de la tabla 4. |
| **Pregunta 12:** ¿Cuál es el comportamiento de $u$ cuando los valores de $t$ tienden al infinito? | Hay dos objetivos: reforzar al alumno que, de hecho, $u$ es un modelo matemático adecuado para el movimiento horizontal del pórtico, ya que, cuando los valores de $t$ tienden a infinito, los valores de $u$ tienden a cero, que se puede percibir mediante el análisis de la representación gráfica de $u$; permitir una primera discusión, de una manera muy intuitiva, sobre el concepto de límite en el infinito de una función. | A través de esta pregunta, el alumno tendrá un primer contacto, de forma intuitiva, con la noción de límite que se discutirá en las clases posteriores a esta revisión al estudio de funciones. En cuanto a los obstáculos epistemológicos explicados en la tabla 3, en esta pregunta está presente el número 8. Si bien el foco de la intervención es el concepto de función, en esta pregunta el alumno puede encontrarse con obstáculos epistemológicos también relacionados con la idea de límite, especialmente en lo que se refiere a la noción de infinito. En cuanto a las dificultades cognitivas que pueden enfrentar los estudiantes, indicamos las denotadas, en la tabla 4, por los números 4, 7, 8, 20, 24, 25 y 26. |
| **Pregunta 13:** Construya, con la ayuda de GeoGebra, en el mismo sistema cartesiano, las representaciones gráficas de $u$, $f$ y $-f$. ¿Existen valores de $t$ para los cuales $u(t) = f(t)$? Y valores de $t$ para los cuales $u(t) = -f(t)$? | Permitir al alumno percibir, en primer lugar, de forma intuitiva y sin necesariamente mencionar estos términos, que la función está limitada superiormente por la función $f$ e inferiormente por la función $-f$. | En esta pregunta, el profesor podrá explorar ideas iniciales relacionadas con el Teorema de la Confrontación de Límite, otro objeto matemático que se trabajará mejor en las siguientes clases. Además, al solicitar que el alumno busque valores de $t$ para los cuales $u(t) = f(t)$ y aquellos para los cuales $u(t) = -f(t)$, el profesor podrá explorar, además de la noción de intersecciones de representaciones gráficas de funciones, la resolución de ecuaciones trigonométricas en $\mathbb{R}$. En términos de obstáculos epistemológicos, no tenemos más consideraciones que las ya hechas sobre otros temas. En cuanto a las posibles dificultades cognitivas que pueden constituir obstáculos para el alumno, destacamos las señaladas en la tabla 4 por los números 4, 7, 8, 15, 20, 25 y 26. |

**Fuente:** elaboración propia.

Tabla 11. *Segunda parte de la planificación para la clase 6 (tercera semana de la intervención)*

| Clase 6: Aplicar el conocimiento construido y resolver el problema propuesto, es decir: obtener de la función $u$ cuya expresión algebraica es $u(t) = 0{,}10e^{-0{,}5t}$ [cos(10$t$ – 0,05)], después cuántos ciclos la amplitud del movimiento horizontal del pórtico será el 20 % de la amplitud inicial (continuación). | | |
|---|---|---|
| Pregunta | Objetivo | Consideraciones Generales |
| Pregunta 14: ¿Cuál es el significado, en el contexto del problema, para $u(t)<0$, $u(t)=0$ e $u(t)>0$? | Permitir al alumno establecer relaciones entre la idea matemática de estudiar el signo de una función, en este caso $u$, y el significado físico de este estudio en el contexto del problema que está siendo considerado. | A través de esta pregunta, los alumnos deben concluir que los valores de $u$ menores que cero indican que en esos momentos en los que se asumen, el pórtico se mueve horizontalmente hacia la izquierda; valores de $u$ mayores que cero indican que en aquellos momentos en que se asumen, el pórtico se mueve horizontalmente hacia la derecha y los valores de $u$ iguales a cero indican que en los instantes $t$ en que ocurren, el pórtico está en la posición inicial. En cuanto a los obstáculos epistemológicos, identificamos los indicados en la tabla 3 con los números 1, 3 y 8. En cuanto a las posibles dificultades cognitivas, indicamos las denotadas en la tabla 4 con los números 4, 7, 8, 15, 16, 20, 25 y 26. |
| Pregunta 15: ¿Cómo identificar los ciclos y las amplitudes de la función $u$ a partir de su representación gráfica? | Tenga en cuenta que, para identificar los ciclos de la función $u$, es necesario determinar los puntos de intersección entre las representaciones gráficas de las funciones $f$ y $u$. | En esta pregunta, el alumno puede notar que la distancia entre las abscisas de dos puntos consecutivos de intersección de las representaciones gráficas de las funciones $f$ y $u$ será el pseudoperíodo de $u$. A su vez, las amplitudes de la función $u$ serán los valores en ordenadas de los puntos de intersección entre dichas representaciones gráficas. Las consideraciones en términos de obstáculos epistemológicos y dificultades cognitivas son las mismas que se presentaron en la Pregunta 14. |
| Pregunta 16: Respondan la pregunta: ¿La amplitud de movimiento será el 20% de la amplitud inicial después de cuántos ciclos? | Movilizar el conocimiento construido a través de las preguntas anteriores para responder a la pregunta principal del problema. | Esta pregunta requiere que el estudiante, si elige una resolución algebraica, resuelva la ecuación: $u(t) = 20\% \cdot u_0$ Si elige una resolución gráfica, basta con que el alumno determine la abscisa del punto de intersección de la recta $y = 0{,}02$ con la representación gráfica de $f$ y luego use el hecho de que cada ciclo dura 0,63 segundos y determina el que se solicita. Nuevamente, las consideraciones en términos de obstáculos epistemológicos y dificultades cognitivas son las mismas que las presentadas para las preguntas 14 y 15. |

Fuente: elaboración propia.

Respecto a esta tercera semana de intervención, presentada en las tablas 9, 10 y 11, es importante señalar que, con el fin de ayudar a los estudiantes a resolver el problema propuesto relacionado con el análisis dinámico del pórtico, se planificó una serie de preguntas auxiliares para las dos clases de esta semana. Estas preguntas, numeradas del 7 al 15, se indican en las tablas 9, 10 y 11. Fueron diseñadas con el objetivo de desencadenar discusiones con los estudiantes sobre los conceptos fundamentales necesarios para la resolución del problema. Esto les permitiría llegar indirectamente a la solución deseada, sin proporcionar respuestas directas, y les daría la oportunidad de revisar los conocimientos que buscábamos reforzar al planificar la intervención.

## Conclusiones

La elaboración de intervenciones didácticas para la enseñanza de matemáticas en ingeniería, basadas en problemas clásicos del área, constituye una tarea sumamente desafiante para el docente. Sin embargo, en nuestra opinión, también resulta gratificante debido a su potencial para fomentar un mayor compromiso por parte de los alumnos en el aprendizaje de contenidos básicos y fundamentales para su formación. En muchos casos, especialmente durante los primeros años de los cursos, estos contenidos parecen carecer de sentido debido a enfoques mayoritariamente desconectados de las especificidades de la ingeniería. Asimismo, en muchos casos, estos enfoques pueden convertirse en obstáculos para la progresión y permanencia de los estudiantes en la carrera a la que ingresaron, o bien representar simplemente una revisión de conceptos ya estudiados en niveles educativos anteriores.

En esta tarea, el docente se enfrenta a diversos retos que deben superarse. Uno de ellos es la selección de problemas específicos de ingeniería que sean potencialmente ricos para abordar los conceptos matemáticos pertinentes. Además, es necesario organizar la intervención considerando tanto la forma en que se abordarán estos problemas en los materiales propios de la ingeniería empleados en las instituciones donde se imparte la enseñanza, como la manera en que se prevé trabajar con un determinado contenido matemático, incluyendo las asignaturas en las que se realiza dicho trabajo y las referencias bibliográficas empleadas. También es importante abordar cuestiones de carácter histórico, especialmente en lo que respecta a los obstáculos epistemológicos vinculados al proceso de desarrollo de un objeto matemático particular. Además, se deben considerar los posibles obstáculos cognitivos que los estudiantes pueden encontrar en el aprendizaje de un cierto contenido matemático.

Otro desafío al que seguramente se enfrentarán los profesores es el hecho de que los problemas a partir de los cuales se desarrollan intervenciones como la presentada, involucran mucho contenido en las ciencias básicas y en el contexto de la ingeniería, el cual muchas veces aún no es dominado por los alumnos. Es necesario adecuar los problemas con cuidado para evitar correr el riesgo de simplificarlos demasiado, lo que podría hacerlos tan poco interesantes para el alumno como situaciones comúnmente trabajadas en clase. Por otro lado, tampoco se debe simplificarlos en absoluto, partiendo de la premisa de que presentar problemas contextualizados ya garantiza la motivación del estudiante, lo que podría hacerlos insuperables en ese momento.

En este artículo, esperamos haber mostrado el potencial de la TMCC, específicamente en su fase epistemológica, para superar los desafíos mencionados. Además, consideramos que este enfoque puede servir como un marco teórico que permita reflexiones relevantes para la reorientación de la práctica del docente que imparte matemáticas en cursos de ingeniería. El objetivo es vincular lo que se está abordando en el aula con el desempeño profesional futuro del alumno.

## Referencias

Akkoç, H. y Tall, D. (2002). The Simplicity, Complexity and Complication of the Function Concept. En A. Cockburn y E. Nardi (eds.), *Proceedings 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2) (pp. 25-32). Norwich.

Brasil. (2019). *Resolução CNE/CES n. 2/2019, de 23 de abril de 2019*. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia. www.in.gov.br/web/dou/-/resolu%C3%87%C3%83o-n%C2%BA-2-de--24-de-abril-de-2019-85344528

Brendefur, J., Hughes, G. y Ely, R. (2015). A Glimpse into Secondary Students' Understanding of Functions. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 1-22. https://eric.ed.gov/?id=EJ1050470

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Camarena, P. y González, L. (2001). Contextualización de las series en ingeniería. *The Mexican Journal of Electromechanical Engineering*, *5*(4), 201-206.

Camarena, P. (2010). *Aportaciones de Investigación al Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería*. http://www.ai.org.mx/ai/archivos/ingresos/camarenagallardo/dra._patricia_camarena_gallardo.pdf

Camarena, P. (2011). Concepción de competencias de las ciencias básicas en el nivel universitario. En A. Dipp y A. Macías (orgs.), *Competencias y educación. Miradas múltiples de una relación* (pp. 88-118). Instituto Universitario Anglo Español; Red Durango de Investigadores Educativos.

Camarena, P. (2012). Epistemología de las impedancias complejas en ingeniería. *Revista Innovación Educativa*, *12*(58), 35-54.

Camarena, P. (2013a). A treinta años de la teoría educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias". *Revista Innovación Educativa*, *13*(62), 17-44.

Camarena, P. (2013b). El conocimiento de las ciencias básicas en profesores de ingeniería. En A. Carrillo, H. Ontiveros y T. Ceceña (eds.), *Formación docente: un análisis desde la práctica* (pp. 212-249). Red Durango de Investigadores Educativos.

Camarena, P. (2017). Didáctica de la matemática en contexto. *Educação Matemática Pesquisa*, *19*(2), 01-26. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p1-26

Dubinsky, E. y Wilson, R. (2013). High School Students' Understanding of the Function Concept. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*, 83-101.

Flemming. D. y Gonçalves, M. (2006). *Cálculo A. Funções, limites, derivação e integração*. Pearson.

García-Quiroga, L., Vázquez-Cedeño, R. e Hinojosa-Rivera, M. (2004) Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías*, *7*(24), 27-34.

Igliori, S. (2007). Uma contribuição para o Ensino-aprendizagem de Noções de Cálculo Diferencial Integral. En M. Câmara dos Santos (ed.), *Atas do IX Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-10). Sociedade Brasileira de Educação Matemática. http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/ix_enem/Mesa/Mesa%20redondTrabalho%20individual%20Sonia%20Barbosa%20Camrgo%20Igliori.doc

Lima, G., Bianchini, B. y Gomes, E. (2016). *Dipcing*: uma metodologia para o planejamento ou redirecionamento de programas de ensino de Matemática em cursos de Engenharia. En N. Nunes de Almeida (ed.), *Anais do XLIV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia* (pp. 1-10). Associação Brasileira de Educação em Engenharia. http://www.abenge.org.br/cobenge/arquivos/3/anais/anais/159316.pdf

Lima, G., Bianchini, B. y Gomes, E. (2018). Conhecimentos docentes e o Modelo Didático da Matemática em Contexto: reflexões iniciais. *Educação Matemática Debate*, *2*(4), 116-135. http://dx.doi.org/10.24116/emd25266136v2n42018a06

Lima, G., Bianchini, B. y Gomes, E. (2019). Elaboração de eventos contextualizados para aulas de Cálculo Diferencial e Integral em diferentes cursos de graduação. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*(2), 186-194. http://funes.uniandes.edu.co/14086/1/Lima2019Elaboracao.pdf

Lima, G., Bianchini, B., Gomes, E. y Schwertl, S. (2020). O problema dos pórticos: uma intervenção didática construída para a disciplina de Cálculo Diferencial Integral. En *Anais do XLVIII Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia* (pp. 1-10). Associação Brasileira de Educação em Engenharia. http://www.abenge.org.br/sis_submetidos.php?acao=abrir&evento=COBENGE20&codigo=COBENGE20_00152_00003127.pdf

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. En P. Leston (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22* (pp. 308-318). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Markovits, Z., Eylon, B. y Bruckheimer, M. (1994). Dificuldades dos Alunos com o Conceito de Função. En A. Sgulte y A. Coxford (orgs.), *As Ideias da Álgebra* (pp. 49-69). Atual.

Mazzilli, C., André, J., Bucalem, M. y Cifú, S. (2016). *Lições em mecânica das estruturas: dinâmica*. Blucher.

Oliveira, N. de. (1997). *Conceito de Função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem* (tesis de maestría). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil. https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11176

Ponte, J. (1990). O conceito de função no currículo de Matemática. *Revista Educação e Matemática*, *15*, 3-9.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. En E. Dubinsky y G. Harel (eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). Mathematical Association of America.

Stewart, J. (2017). *Cálculo* (vol. 1). Cengage Learning.