



Contribuciones a la reflexión sobre la realidad en el proceso de modelación matemática

- Contributions to Reflection on Reality in the Mathematical Modelling Process
- Contribuições para a reflexão sobre a realidade no processo de modelagem matemática

Andrés Mauricio Martínez-Novoa*  

Forma de citar este artículo

Martínez-Novoa, A. M. (2025). Contribuciones a la reflexión sobre la realidad en el proceso de modelación matemática. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (57), 121-137. <https://doi.org/10.17227/ted.num57-20051>

* Magíster en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Docente de la Gobernación de Cundinamarca. ammartinezn@correo.udistrital.edu.co

Resumen

El presente artículo pretende contribuir a la reflexión sobre la pregunta: ¿qué caracteriza las referencias de los estudiantes respecto a la realidad en un proceso de modelación matemática en el enfoque realístico? Esta parte de inquietudes desde la experiencia docente en el aula con un curso de grado octavo y la revisión teórica acerca de la modelación matemática (MM). Por consiguiente, se llevó a cabo una indagación enmarcada en el estudio de casos a partir de una propuesta en el contexto del "Día sin IVA", en la cual, por medio de instrumentos como la pregunta abierta y el análisis de producciones, fue posible dilucidar las referencias de los estudiantes frente a lo que consideran real y encontrar una aproximación de tales referencias con la noción de la perspectiva de modelación. Además, a partir de los fragmentos de las conversaciones y de las elaboraciones escritas de los estudiantes, se identificó cómo las referencias de lo real pueden llegar a influir en el proceso de creación de modelos algebraicos, con base en las alusiones al contexto del que emerge el espacio de modelación.

Palabras clave

modelo matemático; estudio de caso; enseñanza de las matemáticas; educación básica; álgebra

Artículo de reflexión

Fecha de recepción: 29/08/2023
Fecha de aprobación: 07/05/2024
Fecha de publicación: 01/01/2025



Abstract

This article aims to contribute to the reflection on the question, "What characterizes students' references to reality in a mathematical modeling process within the realistic approach?" This question arises from concerns based on teaching experience with an eighth-grade class and a theoretical review of mathematical modeling (MM). Consequently, an investigation framed in case studies was carried out based on a proposal in the context of the "Tax-Free Day" event. Using tools such as open-ended questions and analysis of students' productions, it was possible to elucidate students' references to what they consider real and to find an approximation of these references with the notion of modeling perspective. Furthermore, from fragments of the conversations and the students' written elaborations, it was identified how references to reality can influence the process of creating algebraic models, based on allusions to the context from which the modeling space emerges.

Keywords

mathematical models; case studies; mathematics education; basic education algebra

Resumo

Este artigo pretende contribuir para a reflexão sobre a questão "O que caracteriza as referências dos alunos em relação à realidade em um processo de modelagem matemática na abordagem realista?" Essa questão surge de preocupações baseadas na experiência docente com uma turma do oitavo ano e na revisão teórica sobre a modelagem matemática (MM). Consequentemente, foi realizada uma investigação enquadrada em estudos de caso com base numa proposta no contexto do "Dia sem IVA". Utilizando ferramentas como perguntas abertas e a análise das produções dos alunos, foi possível elucidar as referências dos estudantes sobre o que consideram real e encontram uma aproximação dessas referências com a noção de perspectiva de modelagem. Além disso, a partir de trechos das conversas e das elaborações escritas dos alunos, identificou-se como as referências ao real podem influenciar o processo de criação de modelos algébricos, com base nas alusões ao contexto do qual emerge o espaço de modelagem.

Palavras-chave

modelo matemático; estudo de caso; ensino de matemática; ensino básico; álgebra

Introducción

A partir de la experiencia como maestros de matemáticas en la ciudad de Bogotá, resulta común encontrar cuestionamientos por parte de los estudiantes como: ¿Para qué me va a servir esto que estoy viendo? o ¿Tienen alguna utilidad real para mi vida lo que hago en la clase? Estos cuestionamientos reflejan la tensión entre la puesta en marcha de procesos y actividades desarrolladas por los profesores en el aula y la forma en la que los estudiantes se refieren a lo real.

En educación matemática, el campo de investigación acerca de la modelación matemática (MM) ha venido tomando fuerza por sus potencialidades y virtudes (Blum, 2015; Bassanezi, 2002; Bassanezi y Biembengut, 1997; Posada y Villa-Ochoa, 2006; Villa-Ochoa, 2007; Kaiser *et al.*, 2006; Mancera y Camelo, 2020; Gaisman, 2009; Ministerio de Educación Nacional, 1998, 2006; Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016). Sin embargo, la tensión señalada no es ajena al campo de la MM, ya que se encuentra en la línea de investigaciones que han brindado énfasis a esta contemplación de la realidad en espacios de modelación (Villa-Ochoa *et al.*, 2010; Villa-Ochoa *et al.*, 2017; Villa-Ochoa, 2013, 2015; Villa-Ochoa *et al.*, 2009).

Para indagar sobre la tensión planteada, este documento tiene como objetivo caracterizar las referencias de los estudiantes acerca de lo real.¹ Para ello, se ha asumido la perspectiva de MM conocida como realística o aplicada (Kaiser y Sriraman, 2006), cuyos principales objetivos están guiados en la creación de modelos en el aula desde contextos reales (Villa-Ochoa *et al.*, 2010). Esto con el fin de

aportar a los estudiantes modelos que sirvan de herramientas para situaciones a futuro, tanto en sus profesiones como en su papel de ciudadanos (Burkhardt, 2006).

El documento inicia con una revisión de los antecedentes que abrieron el camino para plantear inquietudes respecto a la realidad y la MM. La siguiente sección, el marco conceptual, profundiza sobre la noción de *realidad* en la perspectiva realística y las categorías utilizadas en el análisis. El tercer apartado, la metodología del estudio, aborda los instrumentos y técnicas utilizadas para la recolección de los datos. En la siguiente sección, se exploran los datos obtenidos a partir de la experiencia, con su correspondiente análisis frente a las categorías de realidad. Por último, en las conclusiones, se presentan las reflexiones y aportes obtenidos de la experiencia.

Antecedentes

Villa-Ochoa *et al.* (2010) presentan en su trabajo un interés por indagar sobre la realidad y el proceso de MM. Según sus palabras,

incorporarse en las clases de matemáticas ofrece diversas ventajas debido a las relaciones que establece entre las matemáticas y la *realidad* asociada a los contextos extraescolares. Sin embargo, el término *realidad* trae consigo un cúmulo de diversos significados e interpretaciones que de una u otra forma inciden en la concepción sobre lo que es la modelación y por tanto su papel en las aulas de clase. (p. 3)

Respecto a la anterior preocupación planteada, en el artículo de Ochoa y Vahos (2009) los autores ponen el foco sobre lo que se entiende por “situaciones reales”, debido a que, en los ejemplos planteados en los lineamientos curriculares (MEN, 1998), tales situaciones pueden contener contextos artificiales o puramente matemáticos, lo que dificulta

¹ Este artículo expone resultados de un proyecto de trabajo de grado realizado en la Maestría en Educación, énfasis en Educación Matemática, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

reconocer si se trata de una actividad de MM o de resolución de problemas. El documento concluye con una diferenciación marcada en la noción de realidad de los contextos utilizados en espacios de modelación, en los cuales se procura que tales contextos resulten lo más cercanos a las situaciones reales.

En línea con lo anterior, el documento de Mesa *et al.* (2014) aporta a la reflexión de las situaciones reales en procesos de modelación, brindando ventajas y virtudes. En sus palabras,

las situaciones enmarcadas en contextos que le son familiares a los estudiantes desencadenan múltiples ideas, propuestas y análisis sobre esa “porción de realidad” que se busca modelar mediante relaciones matemáticas; tales situaciones e ideas otorgan un papel al estudiante de empoderamiento sobre ellas, pues su conocimiento de uso y funcionamiento se transforman en una necesidad digna de pensarse desde construcciones matemáticas. (p. 66)

De esta manera, los autores proponen que las situaciones sean próximas al contexto real y cotidiano de los estudiantes, pues esto desencadena oportunidades dentro de los procesos de modelación. En otro trabajo relacionado con la categoría de *realidad* y desde la perspectiva del maestro, Villa-Ochoa *et al.* (2009) desarrollaron un estudio de caso sobre cómo el profesor Alberto se refiere a lo real. En él, concluyeron que es necesario indagar en aspectos como: 1) las formas en las que el profesor interpreta la realidad; 2) las formas en las que el profesor piensa que una situación “armoniza” el contexto escolar; 3) la forma en la que el profesor considera que una situación se ajusta a la realidad escolar; 4) el nivel de comodidad y apropiación que el profesor tiene sobre el contexto sociocultural; 5) La *racionalidad* que el profesor le imprime al fenómeno en relación con el concepto a construir, y 6) el nivel de *entrenamiento* que el profesor posee frente al proceso de modelación (p. 171).

En el anterior estudio se puede evidenciar la necesidad de producir investigaciones enfocadas en la categoría de *realidad*. Sin embargo, hasta ahora se ha centrado la discusión en el sentido de realidad de los profesores, en las referencias por parte de los maestros y no tanto por parte de los estudiantes. Frente a esto, existe el registro de la investigación realizada por Pires de Rocha (2015), quien indaga por las interpretaciones de realidad y matemáticas que hacen los estudiantes inmersos en un proceso de MM desde la perspectiva sociocrítica, en un contexto educativo de Brasil. El estudio presenta la siguiente conclusión:

Entiendo que algunas dimensiones planteadas en esta investigación pueden provocar reflexiones en el docente respecto a la incorporación de una situación con referencia a la realidad en las clases de matemáticas, como por ejemplo, reflexiones sobre la forma en que elegimos un problema de la realidad, cómo orientamos a los estudiantes en el desarrollo de las actividades, cómo incorporamos las matemáticas, sobre el uso de los recursos tecnológicos en el desarrollo de las actividades de modelización y, principalmente, si la forma en que enseñamos

las matemáticas refleja las referencias que los estudiantes hacen de ellas. (p. 178)

De acuerdo con la autora, esta reflexión acerca de la realidad en espacios de MM permite observar la tensión entre la interpretación del maestro y las referencias que poseen los estudiantes, debido a que esto puede guardar relación con la elaboración y construcción de modelos.

La presente investigación busca contribuir al camino trazado por los trabajos anteriores, que han puesto en la mira el desarrollo de espacios de reflexión sobre la realidad desde diferentes perspectivas. En este caso, se fija la atención en las referencias de los estudiantes en un proceso con un enfoque realístico de modelación. Con este fin, el siguiente apartado expone el marco conceptual con las bases teóricas a tratar en el análisis.

Marco teórico

En este apartado se expone la base teórica acerca de las categorías MM y *realidad*. Sobre la primera, entendida como proceso a partir de documentos legales en Colombia, como los *Lineamientos Curriculares en Matemáticas* (MEN, 1998) y los *Estándares Básicos de Competencias* (MEN, 2006), es posible observar la promoción de la MM como proceso general a desarrollar en el aula. En este, los estudiantes encuentran estructuras, regularidades y patrones a partir del abordaje de situaciones reales, de preferencia desde su propio contexto, con el fin de construir un modelo matemático que permita analizar y comunicar el comportamiento de la situación (MEN, 1998).

Existen múltiples y variadas formas de concebir el proceso de modelación matemática. Los trabajos de Biembengut y Hein (2004) o Bassanezi (2002) son ejemplo de ello, por lo que también existen diferentes perspectivas. En estudios como el de Kaiser y Sriraman

(2006) o Kaiser, Blomhøj y Sriraman (2006) se plantean cinco diferentes vertientes de la modelación matemática, de acuerdo con los propósitos de implementación en aulas de clase. Para este artículo, se tomará el camino de la perspectiva de MM realística o aplicada, estudiada en trabajos como el de Villa-Ochoa *et al.* (2010), cuyo objetivo está asociado con las metas de uso, o pragmáticas, de la educación matemática.

En este enfoque, se busca crear espacios de MM que surjan de situaciones necesariamente reales, que provengan del entorno de los estudiantes o de contextos de diferentes áreas científicas (Burkhardt, 2006). Por su parte, la creación de los modelos está orientada al desarrollo de dos objetivos principales: 1) que puedan ser utilizados por los estudiantes en situaciones externas al aula de clase —lo cual pretende dar significado a los objetos matemáticos utilizados a partir de su practicidad en la vida cotidiana—, y 2) a partir de su aplicación, deben permitir a los estudiantes tomar decisiones óptimas frente a las problemáticas que puedan enfrentar como ciudadanos o profesionales en el futuro.

Acerca de las situaciones reales y de la segunda categoría, la *realidad*, Burkhardt precisa que, al momento de aterrizar las ideas de la matemática aplicada al aula de clase, conviene que tales situaciones *reales* se entiendan como fenómenos constituidos del entorno o el contexto: los niños “aprenden a comprobar su dinero antes de entrar en una tienda y verificar el cambio. Como adultos, pueden planificar sus finanzas y el diseño de muebles cuando se mudan a casa” (Burkhardt, 2006, p. 181). En esta cita se presenta una noción de realidad que se puede generar a través de la percepción de fenómenos cotidianos o del entorno de nuestras vidas. En correspondencia con lo anterior, Villa-Ochoa *et al.* (2010) consideran que “la noción de

realidad se encuentra cercana al estudio de los contextos en la vida cotidiana, el entorno o las demás ciencias” (p. 51).

Sobre esta forma de concebir la realidad, existen investigaciones desde el campo de la educación matemática (Guerrero-Ortiz y Ferri, 2022; Arcos *et al.*, 2018; Ochoa y Vahos, 2009) en las que se especula sobre las maneras de percibir lo real y su influencia en el aprendizaje de las matemáticas. Estudios como el de Alsina (2007) aportan una consideración en la misma línea de lo hasta ahora planteado. Según el autor, la concepción de realidad refiere a entender el mundo real por todo lo que tiene que ver con la naturaleza, sociedad o cultura, en lo que se inmiscuye. Además, abarca la vida cotidiana, así como los temas institucionales de las escuelas o las universidades y de las disciplinas diferentes a las matemáticas (Alsina, 2007, p. 87).

Alsina (2007) propone diferentes categorías respecto a la noción de *realidad* a la que referimos los profesores en las propuestas que llevamos al aula, y los problemas que se presentan en los libros de texto. Las categorías son las siguientes:

- Realidades falsas o manipuladas: se refieren a situaciones que aparentan ser reales, utilizando datos cotidianos o verídicos, pero que han sido deformadas para presentar ejercicios matemáticos.
- Realidades inusuales: son aquellas que poseen un carácter extraordinario, muy fuera de lo apreciable con frecuencia, aunque se presentan como de orden cotidiano.
- Realidades caducadas: corresponden a situaciones que resultan lejanas en el tiempo; importantes en su época, pero anecdóticas en tiempos actuales.
- Realidades lejanas: pertenecen a esta categoría los asuntos de culturas alejadas espacialmente o hechos particulares o exóticos, que distan de los contextos locales y contemporáneos.
- Realidades ocultas: consisten en hechos que no pueden ser experimentados porque son creados a partir de la ficción, de los cuales no puede haber ningún tipo de cercanía, ya que desembocan en modelos que no pueden contrastarse.
- Realidades no adecuadas: refieren a contextos que, por la edad de los estudiantes o las características de su medio, les resulten ofensivos o confusos, además de poco interesantes.
- Realidades inventadas: como indica su nombre, y según Alsina (2006), de las más usuales, son aquellas que brindan panoramas de apariencia real y posible; sin embargo, están plagadas de datos o medidas erróneas, generalmente situaciones que no pueden darse en el planeta Tierra. Suelen provocar futuras dificultades y el reflejo de errores.

De estas caracterizaciones sobre la realidad, se pretende aportar algunas reflexiones sobre cómo los estudiantes pueden estar interpretando la realidad, en el marco de la modelación matemática realística.

Metodología

Esta propuesta está enmarcada en el paradigma cualitativo de investigación (Ramírez, 2011). Para dar ruta al estudio de caso, se han tenido en cuenta los requerimientos expuestos en el marco desarrollado en trabajos como los de Durán (2012) y Stake (2008), junto con las fases propuestas por Martínez-Bonafé (1988, p. 46) en su trabajo sobre el estudio de caso:

- Fase preactiva: comprende la estructuración a partir de creencias previas, fundamentos teóricos, objetivos, cantidad de casos, influencia del contexto, recursos, técnicas y el tiempo estimado.
- Fase interactiva: consiste en la aplicación de la propuesta de modelación matemática y la recolección de datos acorde con las técnicas e instrumentos. Para esta investigación,

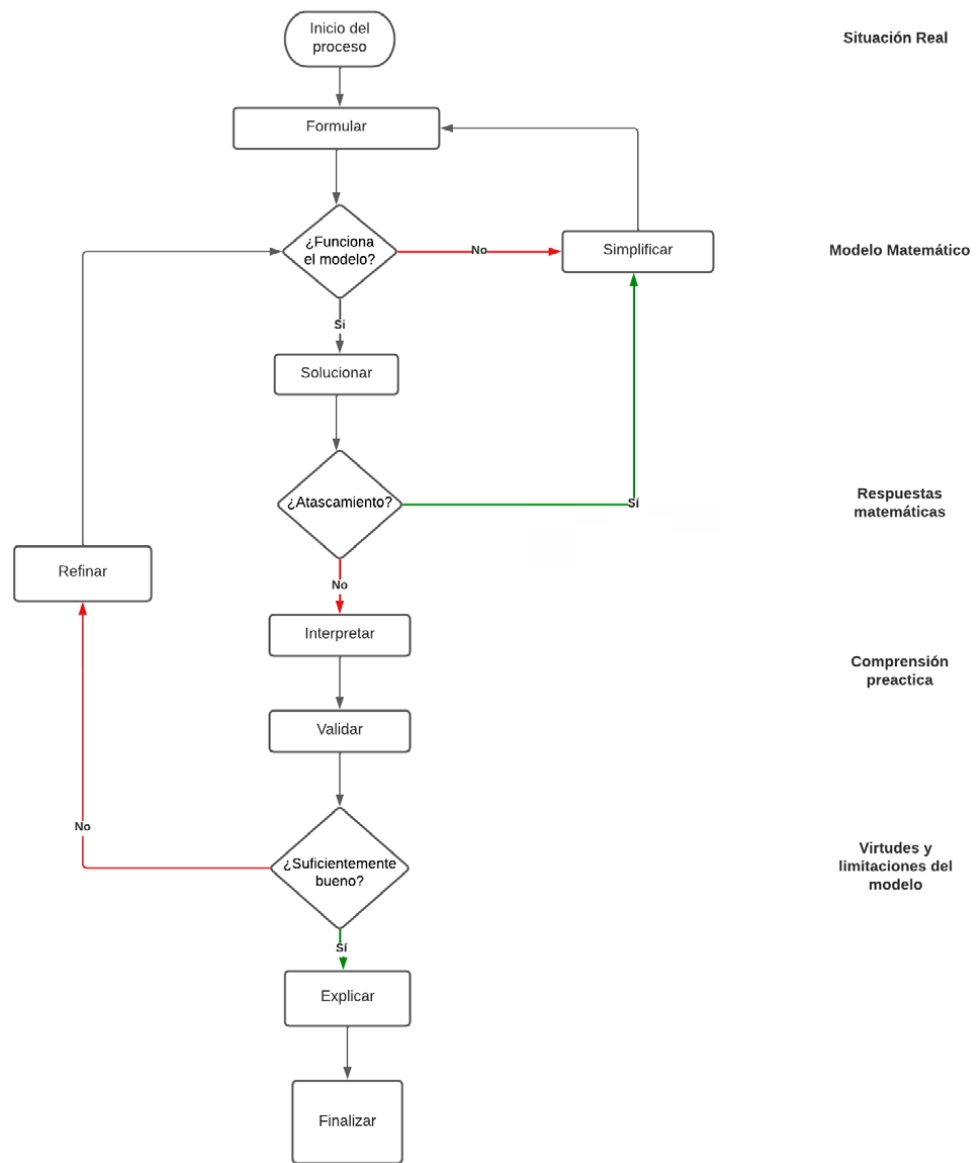
serán el cuestionario y la grabación de audio y vídeo de las sesiones de trabajo.

- Fase postactiva: comprende la elaboración del informe final, el estudio de los datos y la reflexión crítica de los resultados.

En un primer momento, se planteó a los estudiantes la siguiente pregunta: “¿Qué entiende usted por realidad?”. Esta fue contestada en una producción breve y escrita, con el fin de recabar las posibles creencias al inicio de la propuesta y generar un contraste con el referente sobre la noción de realidad, planteado por Burkhardt (2006) o Villa-Ochoa *et al.* (2010), que funcionaron como base para después detectar referencias en el proceso de MM.

Para el segundo momento, en la puesta en marcha de la presente investigación, se llevó a cabo una prueba piloto de una propuesta desde la perspectiva realística, de acuerdo con los procesos planteados por Burkhardt (2006), expuestos en la figura 1, que han servido para el diseño de la tarea.

Figura 1. Procesos de modelación matemática desde la perspectiva realística



Fuente: Burkhardt (2006, p. 181).

Con el ánimo de aclarar mejor el planteamiento, al partir de una situación real resulta importante que el maestro realice delimitaciones sobre variables que puedan complejizar aún más la creación del modelo matemático, dependiendo de factores como el tiempo o la profundidad del contenido a tratar. Además, en la elaboración del modelo, Burkhardt (2006) plantea que el maestro debe concebir su papel como acompañante y guía del proceso de modelación de los estudiantes, suscitar preguntas y contribuir a las indagaciones, discusiones y demás ejercicios que se desenvuelven en medio de la clase.

El estudio de caso se desarrolló con un grupo de 38 estudiantes de grado octavo de una institución educativa de Bogotá, ubicada en la localidad² de Bosa Piamonte. He trabajado con este grupo como docente en el área de matemáticas desde el año 2020, compartiendo espacios presenciales y formatos virtuales debido a la pandemia de COVID-19. Con el grupo se han llevado a cabo diferentes espacios de modelación matemática, en los cuales fue posible detectar inquietudes por las situaciones que acontecen a nivel del colegio, a nivel local e incluso de carácter nacional. Por ello, la puesta en marcha de esta propuesta emerge en gran parte desde la iniciativa del grupo por tratar temáticas referentes a contextos reales.

La indagación tomó un total de 8 sesiones, cada una de 45 minutos. Cada sesión se desarrolló en diferentes clases de matemáticas durante el primer semestre del año 2020. La actividad de modelación matemática abordada con los estudiantes se planteó a partir de una controvertida situación de carácter cultural, que se desprende de una iniciativa del Ministerio de Hacienda en Colombia de incluir los artículos de la canasta familiar en la lista de aquellos que se encuentran con el Impuesto de Valor Agregado (IVA).³ Esta situación ha detonado diferentes reacciones dentro de las clases de matemáticas y en el entorno educativo en general, recordando que tal propuesta se dio justo en los tiempos de la pandemia causada por el virus SARS-COVID-19 y su influencia

en la situación económica. Con el contexto de la noticia, se conversó con los estudiantes respecto a las posibles ventajas o desventajas que podría traer la aplicación de la estrategia sobre la exclusión del impuesto de algunos productos. De estas conversaciones surgió la pregunta inicial: ¿Cómo se puede saber el precio con o sin IVA de un producto cualquiera?

Con esta pregunta, el grupo de estudiantes podría crear estrategias para solucionar el problema y contribuir a la reflexión sobre el impacto que podría traer si se diera por válida la propuesta, aterrizando los planteamientos en diferentes niveles como el educativo, familiar, local, nacional, o el de mayor importancia para los estudiantes. En el siguiente apartado se exponen los resultados de la propuesta, los contrastes encontrados respecto a las evidencias de realidad y al proceso de modelación matemática desde la perspectiva realística.

Resultados y análisis

A partir del marco de referencia planteado y de la metodología llevada a cabo, se recabaron fragmentos de grabaciones y producciones del trabajo con los estudiantes, con el fin de vislumbrar un panorama respecto a las referencias que ellos otorgan sobre la realidad en un proceso de modelación matemática. En consecuencia, en un primer momento se analizarán los escritos emergentes de la primera etapa del proceso, en la cual se pidió a los estudiantes escribir una respuesta a la pregunta: “¿Qué entiende usted por la palabra *realidad*?”. En un segundo momento, se presentarán referencias a la realidad mencionadas por los estudiantes en la actividad central en la que se desarrolló el proceso de modelación matemática desde una perspectiva realística.

2 Según el Decreto 0007 de 2010 de la Presidencia de la República de Colombia, la *localidad* corresponde a la entidad territorial en la que se prestan los servicios públicos domiciliarios, en los términos que trata el artículo 11 de la Ley 505 de 1999.

3 En Colombia, este impuesto, que aplica a la mayoría de productos de la canasta familiar, agrega el 19 % al valor original del producto.

Primer momento: escritos emergentes

Algunas de las producciones de los estudiantes en esta etapa preliminar reflejan expresiones que resultan aproximadas a una interpretación de la realidad hecha por Villa-Ochoa *et al.* (2010) o Burkhardt (2006). Por ejemplo, en la tabla 1 es posible captar una comprensión de lo real relacionada con el entorno en el cual se vive o de las experiencias con el medio.

Tabla 1. *Producto de la estudiante Daniela con referencia a la realidad desde el entorno*

Transcripción
La realidad es lo que vivimos, lo que nos rodea y lo que existe.

Fuente: elaboración propia.⁴

Aunque también puede destacarse de la producción anterior una constitución de lo real en aquello que *existe*, en la que se alude a las cosas que se pueden ver o tocar. En la tabla 2 también es apreciable una referencia cercana a la realidad desde lo entendido en la modelación matemática realista (Burkhardt, 2006). Sin embargo, el estudiante expande su contemplación a todo aquello que nos rodea y a lo que pueda pertenecer a su imaginación. De hecho, es notable la separación entre una realidad *imaginada* y una realidad que puede construirse a partir de esta. Tal realidad *imaginada* podría estar en la misma línea que la realidad oculta, falsa o inventada (Alsina, 2007) debido a su carácter imperceptible y no experimentable.

Tabla 2. *Escrito del estudiante Miguel sobre realidad e imaginación*

Transcripción
Pienso que la realidad es todo lo que vemos a nuestro alrededor, o todo lo que exista en el mundo y que podamos percibir. La imaginación pienso que es una realidad porque por medio de una idea puedo construir algo que se puede volver realidad.

Fuente: elaboración propia.

Concepciones como la anterior también se replicaron y resultaron frecuentes en algunas elaboraciones de otros estudiantes. El ejemplo de la tabla 3 refleja este caso, aunque esta interpretación otorga más fuerza a la idea de que la imaginación puede ser considerada como una realidad.

Tabla 3. *Escrito del estudiante Andrés G. sobre la realidad y la imaginación*

Transcripción
La realidad en sí lo es todo, todo lo que veamos o vivamos, todo lo que queramos puede ser realidad solo hay que usar la imaginación.

Fuente: elaboración propia.

⁴ Para preservar la identidad de los estudiantes, sus nombres fueron cambiados en concordancia con los que ellos mismos sugirieron.

En expresiones como la ejemplificada en la tabla 4, se destaca una concepción en la que interviene el entorno (como ya se ha mencionado), pero que resulta repetitiva o uniforme. En esta concepción, las personas que comparten esa realidad le otorgan un sentido y un propósito. Este tipo de consideraciones añade matices diferentes a los planteados hasta ahora, ya que, aunque en las interpretaciones de Burkhardt (2006) o Alsina (2007) la realidad está cercana a lo que nos rodea, no es tan claro el papel que desempeñan las demás personas en ese entorno. A futuro, esto puede abrir nuevas líneas de investigación.

Tabla 4. Escrito de Mariana sobre la realidad y el papel de las demás personas

Transcripción
Es una realidad algo <i>monótona</i> : siempre son las mismas cosas y los mismos hechos, o casi siempre lo mismo. Mi realidad tiene personas que me hacen sentir feliz y completa porque me gusta como es mi vida. Mi realidad es simple y siento que la llevo como me gustaría.

Fuente: elaboración propia.

De esta manera, las apreciaciones realizadas por los estudiantes en esta primera etapa, antes del proceso de modelación, muestran afinidades y amplitudes con los referentes consultados sobre la perspectiva. Esto se evidencia en los casos mencionados, respecto a las consideraciones de la realidad como entorno (Burkhardt, 2006) o la apreciación de posibles escenarios imaginarios que podrían ser válidos como reales, aludiendo a realidades como las planteadas por Alsina (2007). En el siguiente apartado, se reservará un espacio para observar las posibles relaciones entre tales referencias y lo llevado a cabo en el proceso de modelación desarrollado en el aula de clase.

Segunda etapa: actividad central

Como primer elemento de análisis, se presenta un fragmento de una conversación con un

grupo de trabajo en torno a la necesidad de conocer el valor de los artículos con descuento, como el ofrecido en el día sin IVA en las cadenas de supermercados. En este contexto, una de las estudiantes, Ana, desarrolla una estrategia para calcular el valor final con el descuento, utilizando un ejemplo que aplica un 35 % en lugar del 19 % del IVA:

Ana: Pues yo cojo el valor neto —o sea el valor que dice antes, tal precio— y a ese precio le resto el 35 % y pues voy a saber cuánto es ...⁵ y al valor le resto lo que me dé menos el 35 % y ahí sí voy a saber si le están restando eso. ¿No?

Profesor: ¡Ajá! Exacto, esa sería la mejor opción que uno siempre debería hacer. ¿No? Pues, o si no, te están timando. ¿Cierto? Esa sería la recomendación.

Ana: Ya sabemos, el profe cuando va a hacer compras lleva su calculadorcita; para que no lo roben cuando hay descuentos.

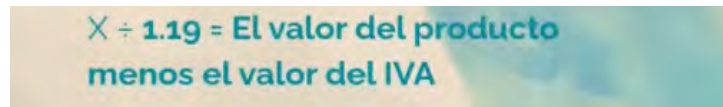
En la conversación anterior entre una estudiante del grupo y el profesor, surge una interpretación de lo real relacionada con el ejercicio de hacer compras. La estudiante, en tono de broma, lleva esta interpretación hacia el campo de una realidad inusual (Alsina, 2007), sugiriendo que la acción de usar una calculadora ocurre rara vez fuera del aula. Esto podría reflejar, por un lado, la necesidad de reconocer habilidades matemáticas y, por otro, el uso de tecnología para el cálculo de porcentajes y su obtención. ¿Acaso no hemos visto personas haciendo cálculos en los pasillos de un mercado? Con esto, en el proceso de modelación matemática (Villa-Ochoa et al., 2010), se pretende abordar la creación de modelos y el desarrollo de herramientas

5 El símbolo de puntos suspensivos (...) es usado para representar que se dio una pequeña pausa.

matemáticas para que el uso de dispositivos no sea visto con desconfianza, sino que permita la toma de decisiones conscientes.

Más adelante en el proceso de modelación, el mismo equipo liderado por Ana elabora y presenta un modelo para determinar el valor de un producto sin el IVA, como se puede observar en la figura 2, tomada de la presentación desarrollada.

Figura 2. Modelo para determinar el valor de un producto sin IVA creado por el grupo de Ana, Mafe, Sharick, Lina y Sara


$$X \div 1.19 = \text{El valor del producto menos el valor del IVA}$$

Fuente: producción del grupo.

Respecto a lo anterior, el grupo expone en voz de la estudiante Ana lo que ha querido plasmar en su ejercicio:

Ana: Bueno, tercer punto, equis, ah, pues no expliqué, equis es el valor del producto [...] equis es el valor del producto, claramente. Entonces, en el tercero, equis lo divido por el 1,19 que es valor del producto menos el valor del IVA. Ehhh... ¿Por qué es 1,19? 1,19 es porque hay dos maneras: uno porque 1 es el producto y 19 porque 19 es el valor del IVA; o, ehhh, 1 porque pues es el valor neto de toda la compra y se divide sobre esa compra y el 19 vuelvo y repito porque es el valor del IVA.

En este episodio es posible apreciar un modelo para calcular el valor de un producto sin el impuesto. En la explicación, Ana justifica la división entre 1,19 porque el número 1 representa el valor neto de toda la compra y el 0,19 al valor del IVA. Esto queda plasmado en una expresión algebraica estrechamente vinculada con la situación, ya que la fórmula “da igual” a “el valor del producto menos el valor del IVA”. Este tipo de modelos funcionan como herramientas para el futuro ciudadano. Según las ideas de Burkhardt (2006), puede tener un significado en el contexto cercano de los días sin IVA. Por ello, se posibilitan situaciones en las que el uso de estos cálculos en el día a día no pertenezca a una realidad inusual o inventada (Alsina, 2007), sino a una habilidad necesaria para evitar pérdidas o malas compras.

Además, se lograron recabar conversaciones durante el proceso de creación de los modelos matemáticos que reflejan no solo cómo los estudiantes pueden suscitar realidades inusuales, sino también la posibilidad de percibir situaciones como realidades falsas, tal como describe Alsina (2007). A continuación, se presenta una charla entre el profesor y un grupo de estudiantes, en la cual es posible detectar tales referencias sobre lo real:

Laura: Bueno, profe, es que ayer [a? nosotras casi se nos explota la cabeza, porque ... Ay, Isabela, usted sabe explicar mejor.

Isabela: Porque es que nosotros nos metimos, estábamos investigando pues de cuánto era el IVA y pues es del 19 %, pero decía que en algunos productos era del 5 % y pues decía, por ejemplo, que si un producto vale 50 000 pesos eh... más el IVA eran 59 500, entonces yo, ... pues no puede ser todo eso el IVA ¿no, profe? Es mentira.

Profesor: Hagamos algo entonces, 50 000 pesos ¿no? cierto y quieren saber cuánto vale con IVA. Vale 59 500.

Isabela: ¿En serio?

Profesor: En serio, Isabela.

Sofía: ¿Profe puede repetir cuánto vale sin y cuánto vale con IVA?

Laura: ¿O sea, son nueve mil pesos más?

Profesor: Son nueve mil quinientos pesos más.

Laura: Nosotras pensábamos que era mentira.

Del momento anterior, surgieron los comentarios de Isabela y Laura respecto a la sorpresa y posible indignación por el aumento con el impuesto, lo cual las llevó a un ejemplo de cómo se podía agregar el IVA a un valor de 50,000 pesos. A partir de esto, las dos estudiantes expresan una posible referencia al ejemplo como una realidad falsa o manipulada (Alsina, 2007), en la que los valores encontrados parecen alterados. Sin embargo, el encuentro con la respuesta del profesor genera un cambio en la noción, como se puede apreciar en el ejemplo. Según lo planteado por Burkhardt (2006), el proceso de modelación debe ir encaminado a una realidad que emerja del contexto. En este caso, las estudiantes enfrentan situaciones reales que pueden

asimilar como legítimas o no, en parte porque las matemáticas les permiten percibir las como falsas o verdaderas.

De igual forma que ocurre con el grupo de Ana, el grupo de Isabela desarrolla su presentación y establece un modelo, o como ellas lo llaman, una *fórmula* para encontrar el valor de un producto agregando el impuesto. Tal modelo se puede observar en la figura 3, tomada de su presentación.

Figura 3. Modelo para determinar el valor de un producto agregando el valor del IVA, creado por el grupo de Isabela, Sofía y Laura

Tomamos el valor del producto sin iva y multiplicamos con 0.19 para tener el producto final con iva

$$\text{ACEITE: } 8.000 * 0.19 = 1.520 + 8.000 = 9.520$$

Formula: $Z * 0.19$

Fuente: producción del grupo.

Sofía: Hola, yo voy a decir la fórmula para poner el IVA a los productos. Primero, tomamos el valor del producto sin IVA y lo multiplicamos con el 0,19 para tener el producto final con IVA. Por ejemplo, el aceite vale 8000 pesos y lo multiplicamos por 0,19, el 0,19 en este caso es 1520 y eso lo sumamos con el precio inicial del aceite; nos daría un resultado de 9520 pesos colombianos. ¿No? Y la fórmula es Z por o multiplicado por 0,19.

En esta parte de la exposición, se puede notar cómo las estudiantes elaboran un modelo utilizado en el ejemplo de un aceite, cuyo precio parece referirse al de la vida cotidiana, conforme a la noción de la perspectiva de modelación (Villa-Ochoa et al., 2009). En el cálculo, podemos ver cómo lo explicado por Sofía —primero hacer la multiplicación y luego sumar el valor inicial— concuerda con los procedimientos. Sin embargo, esto no se refleja en el modelo planteado de forma algebraica o en el escrito en la parte superior.

Según lo planteado por Burkhardt (2006), debe existir una validación interna que funcione matemáticamente, pero también una validación externa respecto a la situación real. De allí puede parecer que las estudiantes comprenden cómo proceder al desarrollar un ejemplo o ejercicio con un precio real. No obstante, en su proceso, se observa un uso inadecuado del signo igual, ya que no representa una relación, sino el paso de una operación a otra. Esto puede estar obstaculizando la creación adecuada de la expresión algebraica.

Los resultados presentados anteriormente constituyen la base y el apoyo para varias reflexiones en el desarrollo de la propuesta de investigación. En el siguiente apartado, se retoma lo expuesto en los resultados y se presentan las conclusiones de la propuesta.

Conclusiones

Con el objetivo de contribuir a la reflexión sobre las referencias de los estudiantes respecto a la realidad en un proceso de modelación matemática (MM) desde una perspectiva realista, a partir de lo encontrado en el proceso y lo presentado en el análisis, se han establecido tres conclusiones.

La primera conclusión se refiere a la similitud en las referencias encontradas acerca de la realidad por parte de los estudiantes, con el marco establecido por Burkhardt (1964, 2006) y Villa-Ochoa *et al.* (2010) desde la perspectiva de MM, así como las categorías ideadas por Alsina (2007). Estas referencias aluden a nuestro entorno cotidiano, del día a día y a lo explorado a partir de diferentes ciencias, del contexto social o de la naturaleza, como se detalla en las expresiones presentadas en los escritos elaborados por los estudiantes (tabla 1). Además, se detectaron casos en los que algunos estudiantes incluyen la imaginación como un campo en el cual también se puede hablar de lo real (tablas 2 y 3). En estos casos, las categorías de realidades falsas, manipuladas o inventadas planteadas por Alsina (2007) pueden considerarse cercanas a lo real.

Sin embargo, el análisis también reveló referencias que amplían esta forma de ver la realidad e incluyen en la discusión el papel de las demás personas en las interpretaciones, como se observa en la tabla 4. Esto destaca el significado que la estudiante atribuye a su interpretación a partir de las personas con las que interactúa.

La segunda conclusión concierne al proceso de modelación matemática realista y a la consideración de los contextos a los que los maestros podemos referirnos en nuestras clases, o lo que Villa-Ochoa *et al.* (2010) denominan el “sentido de realidad”. Como se observó en el apartado de resultados, estos contextos no están necesariamente alineados con las formas en que los estudiantes se refieren a la realidad, ya que pueden considerar la realidad de maneras diversas a las nuestras. Por ejemplo, manifestándose dentro de las categorías propuestas por Alsina (2007).

La tercera conclusión busca contribuir a la comprensión de cómo los estudiantes conceptualizan la realidad en el proceso de MM, permitiendo concebir formas diferentes de caracterizar sus referencias a la realidad y de reconocer si estas son verdaderas o falsas. Esto se evidencia en el fragmento de la conversación con el grupo de Sofía, Laura e Isabela, donde Laura dice: “Nosotras pensábamos que era mentira”. Este hecho dota a las discusiones generadas en el espacio de MM de un carácter transformador, en concordancia con los objetivos del enfoque utilizado (Burkhardt, 2006).

De acuerdo con lo anterior, en los modelos elaborados por los grupos se pudo detectar en sus expresiones en lenguaje natural alusiones al contexto del día sin IVA. Usaban referencias como “el precio del producto” o “el valor del producto sin IVA”, lo cual refleja cómo los estudiantes pueden empezar a describir variables y formular expresiones cuya relación con lo real otorga un significado al modelo, tal como defienden Mesa *et al.* (2014). Además, se observó que el tránsito de tales referencias a la simbolización algebraica requiere un trabajo de investigación más amplio, que se impulsa a llevar a cabo en el futuro.

En la misma línea, el trabajo de guiar un espacio de MM en este enfoque ha resultado ser una tarea exigente, ya que ha demandado la importancia de discernir sobre los contextos que resulten significativos o *reales* para los estudiantes, y la necesidad de ejercitar la habilidad denominada *sentido de realidad* (Villa-Ochoa *et al.*, 2010). Las referencias de los estudiantes aportadas por este estudio posibilitan nuevas rutas de indagación y propuestas para el aula.

Referencias

- Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de educación*, 43, 85-101. <https://rieoei.org/RIE/article/view/752>
- Arcos, J., Borromeo-Ferri, R. y Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 36(1), 99-115. <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v36-n1-huincahue-borromeo-mena>
- Bassanezi, R. y Biembengut, M. (1997). Modelación matemática: una antigua forma de investigación, un nuevo método de enseñanza. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 32, 13-25. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/modelacion-matematica-una-antigua-forma-de-investigacion-un-nuevo-metodo-de-ensenanza/>
- Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia* [Teaching and Learning with Mathematical Modelling]. Editora Contexto.
- Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40516206.pdf>
- Burkhardt, H. (1964). *Modelling with Mathematics* (unpublished lecture notes). University of Birmingham, Department of Mathematical Physics.

- Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: Reflections on Past Developments and the Future. *ZDM*, 38(2), 178-195. https://www.researchgate.net/publication/226388981_Modelling_in_Mathematics_Classrooms_reflections_on_past_developments_and_the_future
- Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What do we Know, What Can We Do? En Sung Je Cho (ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 73-96). Springer.
- Durán, M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista Nacional de Administración*, 3, 121-134. <https://revistas.uned.ac.cr/index.php/rna/article/view/477>
- Gaisman, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87. <https://www.redalyc.org/pdf/1794/179414894008.pdf>
- Guerrero-Ortiz, C. y Ferri, R. (2022). Los desafíos de los profesores en formación en la implementación de la modelación matemática. Una mirada en torno a la realidad. *PNA*, 16(4), 309-341. <https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/21329>
- Ochoa, J. y Vahos, H. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 27, 1-21. <https://www.redalyc.org/revista.oa?id=1942>
- Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A Global Survey of International Perspectives on Modelling in Mathematics Education. *ZDM*, 38(3), 302-310. https://www.researchgate.net/publication/225805678_A_global_survey_of_international_perspectives_on_modelling_in_mathematics_education
- Kaiser, G., Blomhøj, M. y Sriraman, B. (2006). Towards a Didactical Theory for Mathematical Modelling. *ZDM*, 38(2), 82-85. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02655882>
- Mancera, G. y Camelo, F. (2020). Un panorama de la modelación matemática en los Encuentros Colombianos de Matemática Educativa entre 2012-2015. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 15(2), 24. <https://doi.org/10.14483/23464712.14350>
- Martínez-Bonafé, J. (1988). El estudio de caso en la investigación educativa. *Revista Investigación en la Escuela*, 6, 41-50. <https://doi.org/10.12795/IE.1988.i06.03>
- Mesa, L., Orrego, S., López, C. y Villa-Ochoa, J. (2014). Contextos auténticos y la producción de modelos matemáticos escolares. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 42, 48-67. <https://hdl.handle.net/10495/6509>
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares: matemáticas*. Magisterio.

- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias*. Magisterio.
- Parra-Zapata, M. y Villa-Ochoa, J. (2016). Interacciones y contribuciones. Forma de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Actualidades Investigativas en Educación*, 16(3), 283-310. <https://hdl.handle.net/10495/5290>
- Posada, F. y Villa-Ochoa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En *Pensamiento variacional y razonamiento algebraico* (pp. 127-163). Universidad de Antioquia y Gobernación de Antioquia.
- Pires de Rocha, A. (2015). *Realidade, Matemática e Modelagem: as referências feitas pelos alunos* [Tesis de maestría, Universidade Federal de Minas Gerais]. <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/BUBD-A7DHKX>
- Ramírez, E. (2011). La investigación cualitativa en educación. Balance y retos en el contexto colombiano. *Revista Interamericana de Investigación, Educación y Pedagogía*, 4(1), 81-91. <https://doi.org/10.15332/s1657-107X.2011.0001.05>
- Stake, R. (2008). Qualitative Case Studies. En *The SAGE Handbook in Qualitative Research* (pp. 433-466). Thousand Oaks.
- Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. *Tecnológicas*, 63-86. <https://doi.org/10.22430/22565337.505>
- Villa-Ochoa, J. (2013). *Contextos, intereses y sentido de realidad en la modelación matemática: una experiencia con el profesor de matemáticas* (Conferencia). VII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, Santa Maria-RS, Brasil.
- Villa-Ochoa, J., Bustamante, C. y Berrio, M. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME*, 23, 1087-1096. <https://core.ac.uk/download/pdf/12341434.pdf>
- Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, J. y Ocampo, D. (2009). El proceso de modelación matemática. Una mirada a la práctica del maestro. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 1443-1452. <https://core.ac.uk/download/pdf/12341441.pdf>
- Villa-Ochoa, J., Rojas, C. y Cuartas, C. (2010). ¿Realidad en las matemáticas escolares?: reflexiones acerca de la "realidad" en modelación en educación matemática. *Revista Virtual Universidad católica del Norte*, 29, 1-17. <https://www.redalyc.org/pdf/1942/194214466004.pdf>
- Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A. y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espacio Plural*, 18(36), 219-251. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1146871/19718-72370-1-PB_1.pdf
- Villa-Ochoa, J., Quintero, C., Arboleda, M., Castaño, J. y Ocampo, D. (2009). Sentido de realidad y modelación matemática: el caso de Alberto. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 159-180. <https://hdl.handle.net/10495/4551>
- Villa-Ochoa, J. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación*, 8(16), 133-148. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m8-16.mmpe>