UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS, LA LÓGICA DE PROPOSICIONES Y LA TEORIA DE GRAFOS AL ANÁLISIS DE MAPAS CONCEPTUALES

Pedro* Nel *Zapata Castañeda *

Departamento de Química.

Abstract

This paper proposes mathematical and logical processes for the construction of conceptual maps based on proposicional logic, groups and graphs theory. It is expected that readers find in it theoretical frameworks for the comprehension of formal processes related to meaningful learning of concepts.

Key Words. Conceptual mapping, proposicional logic, groups and graphs theory.

RESUMEN

El presente artículo aporta elementos conceptuales para la comprensión y formalización de los procesos lógico- matemáticos implicados en la construcción de mapas conceptuales. En este caso se emplea la teoría de conjuntos, la lógica de proposiciones y la *teoría de gratos con el fin de mostrar un análisis complementario* de los mapas conceptuales como estrategia para examinar el aprendizaje significativo de conceptos.

Palabras clave: mapa conceptual, conjuntos, grafos, lógica de proposiciones.

1. PRESENTACION

Los mapas conceptuales han sido propuestos como estrategia", 'método" y "recurso esquemático" por Novak y Gowin (1988) para representar el aprendizaje significativo de conceptos.

Como estrategia los mapas conceptuales son:

> "..estrategias sencillas, pero poderosas en potencia, para ayudar a los estudiantes a aprender y para ayudar a los educadores a organizar los materiales objeto de este aprendizaje" (Novak y Gowin, 1988, pág. 19).

Como método los mapas conceptuales

* Profesor, universidad Pedagógica Nacional. Estudiante del Programa interinstitucional de Doctorado en Educación (UPN).

"..ayudan a estudiantes y educadores a captar el significado de los materiales que se van a aprender" (Ibid., pág. 19).

Como recurso esquemático el mapa conceptual

"..representa un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones" (Ibid., pág. 33).

Por otra parte, los mapas conceptuales no solo pueden ser empleados como "estrategia de enseñanza" sino también de evaluación. Desde la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, Novak y Hanessian (1968) esta estrategia proporciona un mapa de la estructura conceptual de una persona en un instante dado. Visto así, los mapas conceptuales permiten examinar las relaciones entre distintos conceptos y las formas como estos se jerarquizan, así mismo permiten examinar los procesos de supraordenación y subordinación de los términos mediante los cuales expresamos el aprendizaje bien sea de representaciones, proposiciones o conceptos.

Adicionalmente, como ha de mostrarse en este articulo, los mapas conceptuales pueden analizarse desde tres enfoques complementarios. En primer lugar, la teoría de conjuntos, en segundo lugar desde la lógica de proposiciones y finalmente desde la teoría de grafos.

2. MAPAS CONCEPTUALES Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Según Piaget e Inhelder (1991), en su sintaxis y en su semántica el lenguaje comporta tanto estructuras de clasificación como de seriación. Los sustantivos y los adjetivos recortan la realidad en clases que, o bien se transmiten al niño que aprende a hablar, o bien no se transmiten íntegramente, pero si influyen en él obligándolo, cuanto menos, a un principio de clasificación". (1991, pág. 13).

Los mapas conceptuales son una forma de representar la estructura de conceptos de una persona respecto a un objeto de conocimiento, cualquiera que este sea, a través del lenguaje. Esta estructura puede sufrir diversidad de modificaciones no solo estructurales sino funcionales en virtud de los procesos de asimilación e inclusión responsables de la reorganización conceptual. Los mapas conceptuales representan entonces, en un momento dado, etapas o estados de cuasiequilibrio que sufrirán modificaciones a través de nuevos procesos de asimilación e inclusión. Debe señalar-se, en este caso, que la asimilación y la inclusión han sido los procesos que sustentan, en general, a todas las teorías del aprendizaje por reestructuración como las de Piaget y Ausubel.

Por otra parte, a diferencia de los conjuntos en los que simplemente se mencionan los miembros que pertenecen a una clase, sin mencionar sus propiedades o atributos, en los mapas conceptuales no solo se mencionan los miembros de una clase, por lo general como ejemplos, sino que además se mencionan sus propiedades o atributos, en términos de adjetivos, y las relaciones que se establecen entre ellos. Un mapa conceptual, por lo general, esta formado por palabras o términos que se refieren a objetos (sujetos en términos gramaticales) y acontecimientos (propiedades o atributos del sujeto) que no son otra cosa que los instrumentos del lenguaje mediante los cuales expresamos nuestras nociones, ideas, conceptos o categorías.

Para ilustrar estas afirmaciones se ha elaborado un mapa conceptual que servirá como ejemplo para mostrar la aplicación de la teoría de conjuntos a la comprensión de los mapas conceptuales. Este mapa conceptual se ha elaborado empleando términos cotidianos y por supuesto no representa la totalidad de la complejidad del objeto de conocimiento al que se refiere, en este caso, los animales. Adicionalmente, desde el punto de vista de la biología, algunas de las subclases mencionadas en el mapa no corresponden a clases completamente disyuntas (p.ej. mamíferos y ovíparos) pues, algunos mamíferos como el ornitorrinco y las equidnas son ovíparos (mamíferos monotremas).

No obstante, lo importante en este caso es examinar la lógica implícita en la construcción del mapa con el fin de identificar posibles errores o ampliar la estructura conceptual de tal forma que incluya las diversas variaciones en calidad de subestructuras. En realidad, es posible que un mapa *no* revele la totalidad de la estructura conceptual ,y en este sentido se constituye en una aproximación a un sistema dinámico como es el pensamiento humano.

Como es de esperarse, es posible que un especialista un biología, construyese un mapa conceptual completamente distinto, empleando términos mas científicos, atendiendo a distintas formas de categorización y relación, no obstante, dada la idiosincrasia de la estructura conceptual. el mapa mostrado es un ejemplo de los muchos que pueden elaborarse y es susceptible de los análisis que se presentan a continuación. Las distintas líneas permiten examinar mejor la relación entre los conceptos, por ejemplo, señalando que algunos animales con mamíferos y algunos de estos vuelan —murciélago-.

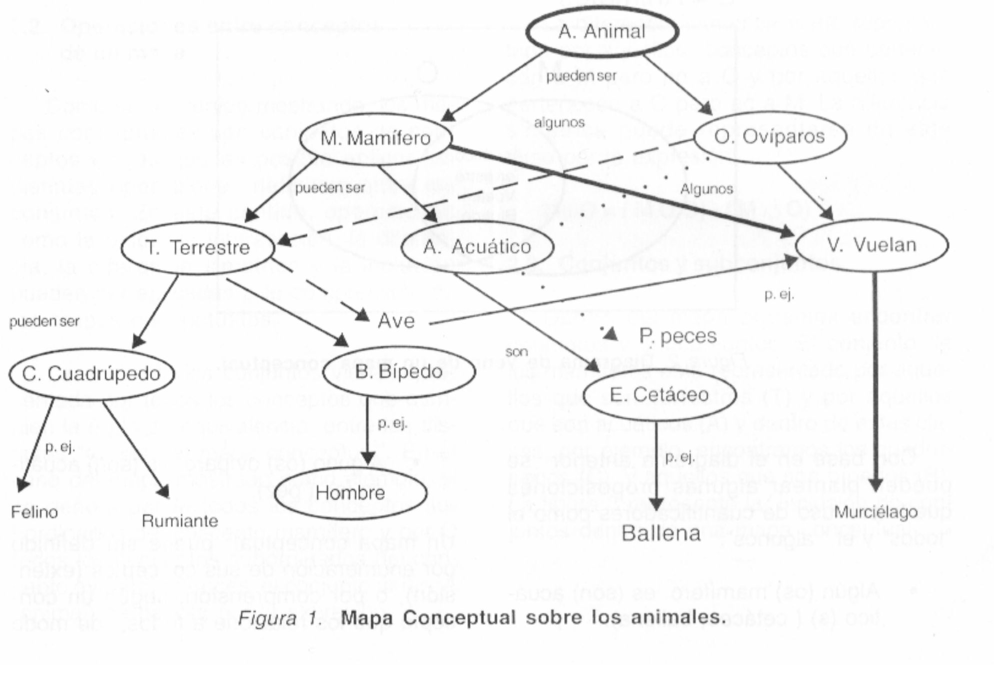

Figura 1. **Mapa Conceptual sobre los animales.**

Si se designa con **S** al mapa conceptual, cuyo concepto mas general e inclusivo es “animal” y **M, O, T, A, V, C,** etc. a cada uno de los conceptos incluidos dentro de él, entonces el que el concepto M pertenezca al conjunto S se representa por:

A Є ***S,***

En este caso la pertenencia de un concepto al mapa conceptual depende no solo de que sea un elemento que pertenezca a una clase (perro, gato, vaca) o de que sea un atributo o categoría relevante, sino que además sea una atribución significativa relacionada, se diría de forma verdadera, con otros conceptos (cuadrúpedo, bípedo, etc.). La pertenencia del concepto entonces no depende sólo de su ubicación dentro del mapa conceptual sino del valor de "verdad" de las relaciones con otros conceptos. Por supuesto, lo mismo que un elemento no puede ser incluido dentro de una clase a la que no pertenece, bien sea porque no cumple las reglas o atributos que definen el concepto, tampoco en los mapas conceptuales pueden introducirse conceptos que no guarden relación con otros conceptos dentro del mapa.

El mapa conceptual anterior puede representarse de igual manera mediante un Diagrama de Venn como el mostrado en la figura 2. La característica de este diagrama radica en que son introducidos adicional-mente conceptos referidos a atributos o propiedades de los miembros de una clase. Ahora bien, los conceptos que se refieren a predicados o adjetivos, por lo general, no dan lugar a clases únicas sino que pueden ser características comunes a dos subclases aparentemente excluyentes. Así pues, conceptos como "terrestre", "cuadrúpedo", "volar" o "bípedo" no son características exclusivas ni de los mamíferos ni de los ovíparos, por lo tanto, como conceptos, hacen parte del conjunto de intersección M∩O.

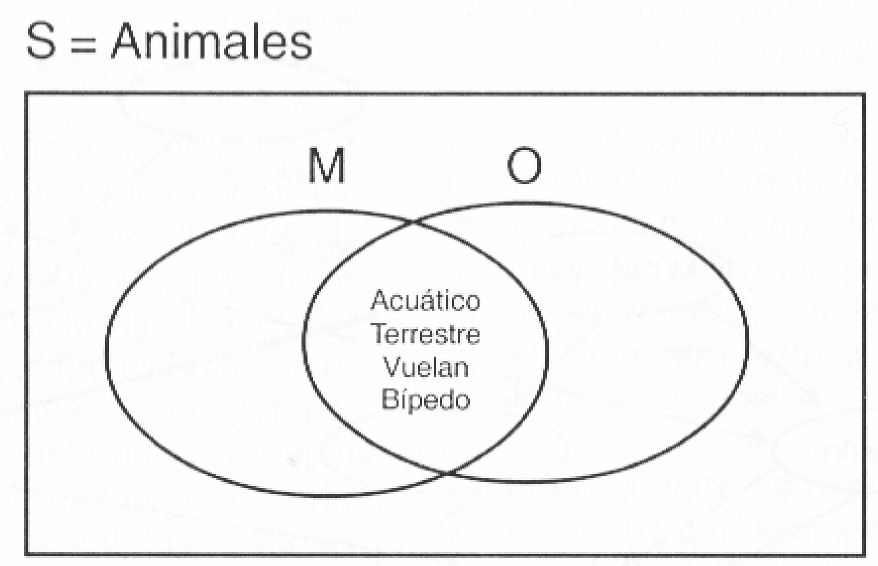

Figura 2. **Diagrama de Venn de un mapa conceptual.**

Con base en el diagrama anterior se pueden plantear algunas proposiciones que hacen uso de cuantificadores como el "todos" y el " algunos".

- Algún (os) mamífero es (son) acuático (s) **(** cetáceo, ballena).

- Alguno (os) ovíparo es (son) acuático (s) (pez).
-

Un mapa conceptual puede ser definido por enumeración de sus conceptos (extensión), o por comprensión, según un con-copto que los relacione a todos, de modo que los conceptos del mapa tengan tal propiedad o estén relacionados de alguna manera con él. En este caso, la propiedad o atributo esta representado por el concepto más general dentro de la estructura jerárquica del mapa conceptual (animal).

2.1. Diferenciación progresiva y potencia de un mapa

En la obra de Ausubel, Novak y Hanessian (1968) se ha señalado que la diferenciación progresiva es un proceso importante para estimar el nivel de aprendizaje significativo de una persona. Tal proceso tiene como indicador fundamental el número de conceptos que aparecen dentro de un mapa conceptual, el cual representa una mayor diferenciación progresiva en virtud del mayor número de diferencias que se establecen entre los conceptos. En el caso de la teoría de conjuntos se ha señalado que la potencia de un conjunto puede ser definida por el número de sus elementos. Así pues, se dirá que un mapa conceptual es más potente que otro en función del número de conceptos dentro de él.

2.2. Operaciones entre conceptos de un mapa

Como se ha venido mostrando, los mapas conceptuales son conjuntos de conceptos en los que es posible aplicar las distintas operaciones definidas entre los conjuntos. En este sentido, operaciones como la unión, la intersección, la diferencia, la diferencia simétrica y la inclusión pueden ser aplicadas a la comprensión de los mapas conceptuales.

La unión de los conjuntos viene representada por todos los conceptos que cumplen la regla de equivalencia entre las distintas “ramas del mapa conceptual”. En el caso del mapa mostrado como ejemplo, si se denota por M todos los conceptos subordinados del concepto mamífero y por O todos los conceptos subordinados del concepto ovíparo entonces el conjunto unión A (animal) se denota por la expresión:

$$\mathbf{A = M \cup O \text{ o } (x/x \in M \text{ o } x \in O)}$$

En este caso la o no es exclusiva puesto que x es un concepto que como clase o atributo puede pertenecer o denotar solo a M, ó solo a O, o a M y a O a la vez, como ocurre con los conceptos de “amamantar” o “ ser vivo”, respectivamente.

La intersección I de dos conjuntos M y O es el conjunto de los conceptos que a nivel de atributos pertenecen o denotan a ambos M y O, por ejemplo “terrestre”.

$$\mathbf{I = M \cap O = (x / x \in M \text{ y } x \in O)}$$

La diferencia entre dos conjuntos es el conjunto de los conceptos que pertenecen a M pero no a O, así pues, el conjunto diferencia D viene representado por:

$$\mathbf{D = M - O = (x / x \in M \text{ y } x \in O)}$$

En este caso algunos conceptos que forman parte de este conjunto son, por ejemplo, primates y cetáceos, a nivel de clase, o “amamantar” a nivel de atributo.

La diferencia simétrica viene representada por aquellos conceptos que pertenecen a M pero no a O y por aquellos que pertenecen a O pero no a M. La diferencia simétrica puede representarse en este caso por a expresión:

$$\mathbf{M \ominus O = (M \cup O) - (M \cap O)}$$

2.3. Conjuntos y subconjuntos

Dentro del mapa podemos encontrar conjuntos y subconjuntos. El conjunto de los mamíferos esta representado por aquellos que son Terrestres (T) y por aquellos que son acuáticos (A) y dentro de estas ciases, por ejemplo, encontramos los cuadrúpedos (C) y aquellos que son bípedos (B). La figura 3 representa la inclusión de conjuntos dentro de una mapa conceptual.

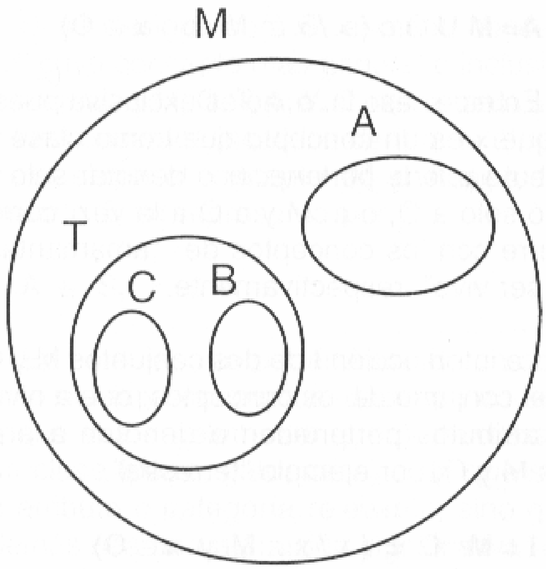

Figura 3. **Inclusión de Conjuntos en un mapa conceptual.**

Ahora bien, es posible representar un mapa conceptual a través de una matriz similar a un producto cartesiano. Tomando como ejemplo el mapa conceptual elaborado, una forma de representarlo puede ser:

Animales	**Terrestres**		**Acuáticos**
	Cuadrúpedos	Bípedos	
Mamíferos	gatos, perros, etc.	hombre	ballena
Ovíparos	tortuga	aves	peces

3. MAPAS CONCEPTUALES Y LOGICA DE PROPOSICIONES

Los mapas conceptuales pueden ser analizados desde la lógica de proposiciones. De la expresión **M + O** = **A, en** donde la clase M esta formada por los mamíferos y la clase O por los ovíparos, es posible aplicar todos los cuantificadores posibles como: todos los mamíferos M son algunos animales A, esdecir **M<A, o M=A-O**, es decir, M y O son complementarios.

Los mapas conceptuales pueden ser vistos como una estructura de árbol en la que es posible examinar la lógica de significaciones en términos de las conjunciones, disyunciones, implicaciones y demás operaciones binarias necesarias para desplazarse dentro de la estructura.

La estructura del mapa conceptual es isomorfa a un agrupamiento de clasificación en donde las inclusiones y exclusiones son sus operaciones constitutivas. Así podemos encontrar dentro del mapa operaciones como implicaciones del tipo **M ⟶A,** implicaciones reciprocas **M⟵A**, no implicaciones, conjunciones en orden ascendente disyunciones en orden descendente, equivalencias, tautologías, vinculaciones nulas y vinculaciones entre afirmaciones y negaciones.

3.1. Mapas conceptuales e implicaciones

En el mapa conceptual encontramos dicotomías cuyos términos se excluyen reciprocamente. Cuando se analiza el mapa de forma descendente las implicaciones no son simples, es decir de la forma **A— M** sino que se trata de implicaciones en que el antecedente A (p. ej. animal) entraña como consecuencia una dicotomía (M u O) (mamífero u Ovíparo). Si x es un animal mamífero implica que sea terrestre **T** o acuático, **A**, pero no los dos. En este caso los conjuntos **T** y **A** son excluyentes.

Si se examina en forma ascendente la estructura del mapa encontraremos que la expresión **M** + **O** = **A** representa una conjunción obligada con una comprensión de las inclusiones **M c A y O c A** (los mamíferos están incluidos en los animales).

En un mapa conceptual por tanto, cuya jerarquía entre los conceptos se mantiene, se pasa de las conjunciones en orden ascendente a las disyunciones en orden descendente. Así pues en la construcción de un mapa de forma ascendente uno se imita a agregar nuevos elementos o conceptos en las clases ya establecidas, en tanto que en marcha descendente se trata de razonar sobre “posibles” considerando cada ramificación de la estructura.

Por otra parte, en el mapa conceptual si **M = T** + **A** (los mamíferos terrestres y los mamíferos acuáticos) entonces si un animal es un mamífero es forzosamente o un **T o** un **A, la** implicación **M—>T** significa que el pasaje por M es una condición previa a su continuación en T.

La jerarquización de los conceptos y la respectiva lógica de proposiciones en la estructura de árbol del mapa conceptual no implica sin embargo que el sujeto tenga plena conciencia de ellas o que pueda formalizar estas operaciones.

La disyunción no exclusiva se presenta en el caso de que el sujeto pueda comprender que existen elementos seriados de la forma **C <T** < **M** en donde C representa un concepto cuyo nivel de inclusión es más pequeño que el concepto M.

La equivalencia se manifiesta, por ejemplo, cuando el sujeto comprende que la dicotomía (cuadrúpedo-bípedo) o (terrestre-acuático) o (mamífero-ovíparo) se mantiene idéntica en todas las subdivisiones de la estructura de árbol del mapa conceptual.

3.2. Representación de un mapa como un conjunto ordenado

La representación de un mapa conceptual puede entenderse también como un conjunto ordenado, en el sentido de que la organización jerárquica de los conceptos en extensión y comprensión supone que los conceptos más inclusivos o generales se encuentran en la parte superior del mapa. Así pues, de la expresión en el mapa se deduce que **(A) animales > (M) Mamíferos** > **(C) cuadrúpedos.** En este caso aunque no hay línea entre A y C, el hecho de que A>C puede deducirse del mapa conceptual de las líneas AT, TM y MC en virtud de la transitividad

4. MAPAS CONCEPTUALES Y GRAFOS

Para ilustrar como los mapas conceptuales pueden ser analizados desde la teoría de gratos, se acudirá a la obrado Flament (1963), en la que sin hacer referencia a los mapas conceptuales, se aportan diversidad de elementos para la comprensión de las estructuras de grupo desde la teoría de grafos.

4.1. Distancias en los mapas conceptuales

La distancia en el mapa conceptual se puede definir sí para cada par de conceptos A y B se puede asociar el número d (A, B*)* en la que

d(A, B) > 0 y d (A, B) **=** 0 si y solo sí A = B

d(A,B) =d(B,A)

d(A,B) + d(B,C) =d(A,C)

La distancia en un mapa conceptual podría representarse por el número de conexiones validas entre los distintos conceptos del mapa y el número de arcos que hay entre dos conceptos cualesquiera. Para ilustrar esta afirmación podemos representar el mapa conceptual mediante una matriz como la que se muestra a continuación:

Cuadro 1. **Matriz de distancias de un mapa conceptual.**

	animal	mamífero	ovíparo	terrestre	acuático	cuadrúpedo	bípedo	ave	pez	cetáceo	volar	felino	rumiante	hombre
animal	0	1	1	2	2	3	3	3	3	3	2	4	4	4
mamífero		0	0	1	1	2	2	2	0	2	1	3	3	3
ovíparo			0	1	1	0	0	2	2	0	1	0	0	0
terrestre				0	0	1	1	1	0	0	0	2	2	2
acuático					0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
cuadrúpedo						0	0	0	0	0	0	1	1	0
bípedo							0	0	0	0	0	0	0	1
ave								0	0	0	0	0	0	0
pez									0	0	0	0	0	0
felino										0	0	0	0	0
rumiante													0	0
volar								0			0	0	0	0

Los conceptos de la columna son todos aquellos de los cuales "sale una flecha' (conjunto de partida) y los que conforman la fila son todos aquellos a los que "llega una flecha" (conjunto de llegada). La sumatoria de las columnas nos da una idea del número de veces en que un concepto "**es relacionado con"** (supraordenación), mientras que la sumatoria de las filas nos da una idea del número de veces en que un concepto **"se relaciona con"** (subordinación).

La sumatoria total de la matriz correspondería a la distancia total entre los con-coptos que conforman el mapa. La sumatoria de cada fila nos da una idea de la distancia de un concepto respecto a todos los demás conceptos del mapa, mientras que la sumatoria de la columna nos da una idea de la distancia total entre un concepto y los relacionados con él.

En este caso se observa que aquel concepto cuya distancia total, obtenida en la fila, sea mayor que todas las demás será el concepto mas general o inclusor (Animal), mientras que aquellos conceptos cuyas distancias sean intermedias corresponden a jerarquías intermedias y aquellos conceptos cuya distancia total en la fila sea cero corresponden a los conceptos ubicados en el ultimo nivel de jerarquía. De lo anterior se deriva que a partir de una matriz como la mostrada anteriormente es posible elaborar un mapa conceptual.

4.2. Propiedades de los grafos y mapas conceptuales

En el caso de los mapas conceptuales si se designa con X al conjunto de conceptos que forman el mapa y V a cualquier arco, en este caso cualquier relación entre dos conceptos representada por una flecha o línea que los une, entonces es posible aplicar algunas propiedades de los gratos.

Grafo simétrico: En un mapa encontramos gratos simétricos si se varia el conector entre dos conceptos, como se muestra en la figura 4.

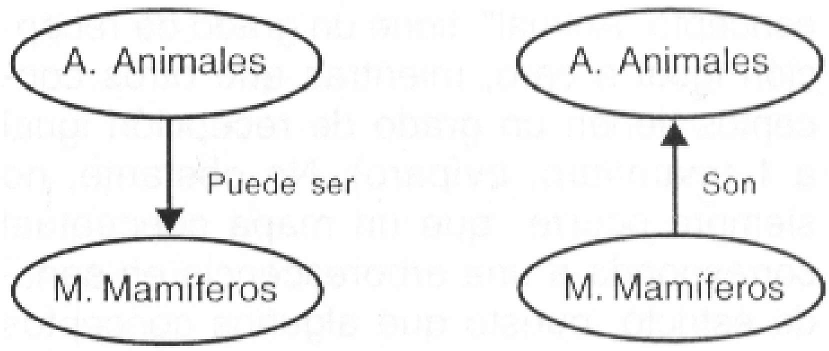

Figura 4. **Grafo simétrico.**

En este caso para cualquier par de conceptos A y M se tiene que:

(A,M) Є V <—> (M,A) Є V

Grafo transitivo: Un grafo transitivo completo esta representado por una relación de orden dentro del mapa, en este caso

(A,T) Є V y (T,M) Є V ⟹ (A,M) Є V

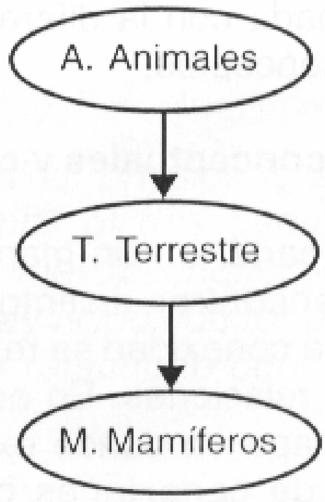

Figura 5. **Grafo transitivo.**

Los mapas conceptuales son grafos sin loops, o gratos reflexivos, puesto que no se encuentran arcos de la forma **(x, x) Є V.**

4.3. Arborescencias en los mapas conceptuales

Los mapas conceptuales pueden representar arborescencias o árboles. En la mayor parte de los casos es posible que todo concepto **x Є X** tenga un grado de recepción igual a 1 (es decir, llegue una flecha) a excepción del concepto mas general de la estructura jerárquica cuyo grado de recepción es cero. En nuestro ejemplo, el concepto Animal tiene un grado de recepción igual a cero, mientras que otros conceptos tienen un grado de recepción igual a 1 (mamífero, ovíparo). No obstante, no siempre ocurre que un mapa conceptual corresponda a una arborescencia en sentido estricto, puesto que algunos conceptos pueden tener un grado de recepción mayor que 1. En este caso, el mapa conceptual se asemeja mas a una estructura de árbol.

Finalmente, habría que señalar que los mapas conceptuales. dependiendo de su complejidad, pueden presentar distintos tipos de longitudes, entendida esta como el número de arcos que constituyen el camino entre dos conceptos. De esta forma, no es la misma distancia la que hay entre los conceptos **Mamífero ->Vaca (d=1)** y la que hay entre **Mamífero** —> **terrestre** —> **cuadrúpedo** —> **rumiante vaca (d = 4)**. En este caso la distancia entre dos conceptos esta muy relacionada con la diferenciación progresiva de conceptos.

4.4. Mapas conceptuales y conexidad

Por otra parte, en un mapa-conceptual es posible encontrar distintos niveles de conexidad. La conexidad se refiere a la densidad de las relaciones. En aquellas regiones de un mapa en donde exista una mayor número de conexiones cruzadas, así como conceptos que permitan la intersección entre dos ramas, habrá un nivel de conexidad mucho mayor que en aquellas regiones en donde las relaciones simplemente sean ordinales.

5. CONCLUSIÓN

Los distintos análisis de los mapas conceptuales llevados a cabo desde la teoría de conjuntos, la lógica de proposiciones y la teoría de gratos muestran, en términos generales, que en su construcción no intervienen solo factores perceptivos, mecánicos o memorísticos, sino que demandan el empleo, por parte del sujeto que los elabora, de una lógica de significados que puede ser representada mediante los instrumentos de la lógica”matemática y formal.

El hacer explícitos este tipo de formalizaciones contribuye, sobre todo en el contexto educativo, al desarrollo del pensamiento matemático y lógico de los estudiantes y a la comprensión real de los procesos implicados en la construcción de conocimiento, puesto que la elaboración de un mapa no se hace solo a partir de los fenómenos observables en si mismos sino de las relaciones y atribuciones que se establecen entre ellos, las cuales son obra del sujeto.

BIBLIOGRAFÍA

Ausubel, D. P.; Novak, J. D. y Hannessian, H. (1968) Educational Psychology: a cognitive view. New York: Holt, Rineharth and Wiston. (Trad. Cast. Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas).

Flament, C. (1963) Applications of graph theory to group structure, Prentice Hall New Jersey, (trad. caste. Juan Sanchez O. Teoría de grafos y estructuras de grupo. Madrid, tecnos, 1972).

Novak, J. D. y Gowin, D.B. (1988). *Aprendiendo* a *aprender.* Barcelona: Martínez Roca.

Píaget, J. e Inhelder, B. (1991). La genese des structures logiques. Clasifications et seriations De. Delachaux et Niestlé, Suiza (Trad. cast. Mercedes Riani. La génesis de las estructuras lógicas elementales. Clasificaciones y seriaciones Sexta Edición Buenos Aires: Editorial Guadalupe).