

ANÁLISIS DE ENERGÍA DEL OSCILADOR ARMÓNICO CONMUTADO

Edgar Mendoza Parada
Universidad Pedagógica Nacional
Departamento de Tecnología.
edgarmen@colomsat.netco

Abstract

The article shows an analysis of energy variation on a variable structure system. It is composed by two harmonic oscillators of different frequencies switched when velocity is zero and velocity is maximum. In conclusion, each time less energy finite quantities are instantly lost in successive switched where velocity is zero, until store energy in system is voiding. In the switched where velocity is maximum, energy does not show any variation. The article also shows an analogy with a switched electrical oscillators and it shows the physical interpretation corresponding.

RESUMEN

Se presenta un análisis de la variación de energía en un sistema de estructura variable formado por dos osciladores armónicos de diferente frecuencia que se conmutan cuando la velocidad es cero y cuando la velocidad es máxima. Se concluye que cantidades finitas de energía cada vez menores son pérdidas instantáneamente en las sucesivas conmutaciones donde la velocidad es cero hasta que finalmente la energía almacenada en el sistema se anula. En las conmutaciones donde la velocidad es máxima la energía no varía. Se presenta además una analogía con un oscilador eléctrico conmutado y se muestran las correspondientes interpretaciones físicas.

1. Introducción

Supóngase un oscilador masa-resorte sobre una superficie sin fricción, tal que la masa o la constante elástica cambian entre dos valores, en instantes bien predeterminados de la oscilación. Esta conmutación física es de difícil realización, además claro está, que la condición de ausencia de fricción es imposible. Sin embargo, el sistema análogo eléctrico formado por una bobina y un condensador, que conmutando con otro en paralelo modifica su valor secuencialmente en tiempos preestablecidos, permite una aproximación más fácil a una realización física del problema mecánico descrito. En cualquiera de los dos casos la conmutación no introduce en el modelo matemático ningún elemento disipador de energía. No obstante, en ambos casos las variables de estado del sistema (posición y velocidad de la masa, o corriente y voltaje en el circuito) tienden a cero, como se verá fácilmente en un análisis sobre el plano de fase. Esto indica que la energía inicial del sistema desaparece. Cómo ocurre esto, en sistemas conservativos que conmutan entre sí, es el problema básico tratado en este artículo. La situación es interesante desde el punto de vista pedagógico por su naturaleza paradójica, y también porque el problema se puede inscribir en el contexto del control de estructura variable, aunque normalmente en este ámbito los problemas no se abordan desde una perspectiva de energía.

En el siguiente ítem se describe de manera somera el entorno de control en el que el problema se formula. Después se aborda desde una perspectiva esencialmente física tomando como base de interpretación el oscilador masa resorte. Finalmente se analiza el oscilador bobina condensador conmutado por su riqueza explicativa.¹

1. En términos matemáticos, el problema a resolver en un sistema de control puede formularse de manera bastante general, como el de la

1. No es esencial la formulación del problema de control de los siguientes párrafos para seguir la argumentación a partir de la ecuación (1) abajo.

búsqueda de una función que altere de manera conveniente el campo vectorial asociado a las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema físico a ser controlado. Si la función de control se determina con base en el conocimiento de las variables de estado del sistema, y depende de ellas, se tiene el llamado control por realimentación de estado. En este caso la dinámica de cada variable de estado x_i , es indicada por cada una de las líneas de la ecuación $\dot{x} = f(x, t, u(x))$ con $x \in \mathcal{R}^n$ y $u(x) \in \mathcal{R}^m$. Si el campo vectorial no depende explícitamente del tiempo tenemos que $\dot{x} = f(x, u(x))$. Para el caso en que el sistema es lineal en el estado y en el control, e invariante en el tiempo, la anterior ecuación se escribe como $\dot{x} = Ax + Bu$, con A y B matrices constantes de dimensiones compatibles. Si se tiene realimentación lineal de estado $u(x) = Kx$, donde K es un vector fila de constantes que se calculan en función del comportamiento deseado, este sistema queda entonces expresado como $\dot{x} = (A - BK)x$. Puesto que en el sistema lineal autónomo $\dot{x} = Px$ el comportamiento dinámico queda completamente determinado por los vectores y los valores propios de la matriz P , es evidente que con la realimentación de estado se consigue modificar el comportamiento de la planta.

Una realimentación con conjuntos de valores diferentes dependiendo de regiones previamente establecidas en el espacio de estado, conduce a dinámicas diferentes según la región en la que se encuentre el estado del sistema. Entonces se dice que el sistema es de estructura variable. Como caso particular considérese una función de control de realimentación de estado pero definidas de manera diferente según que el estado esté a uno u otro lado de una superficie $s(x) = 0$ de dimensión $n - 1$. Se tiene entonces,

$$u(x) = \begin{cases} K^+ x & \text{si } s(x) > 0 \\ K^- x & \text{si } s(x) < 0 \end{cases}$$

donde los supraíndices sobre el vector K distinguen los vectores de ganancia en las dos regiones separadas por la superficie.

Un ejemplo simple de la situación descrita se obtiene con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $u(x) = u(x_1) = k^{\pm} x_1$ según el estado esté encima o abajo de una superficie, lo que da dos estructuras centros $\dot{x} = A^+ x$ y $\dot{x} = A^- x$ con $A^{\pm} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21}^{\pm} & 0 \end{bmatrix}$ si $a_{21}^{\pm} = a_{21} + k^{\pm} < 0$. Más explícitamente se tienen dos sistemas de ecuaciones de primer orden, $\dot{x}_1 = x_2$; $\dot{x}_2 = a_{21}^{\pm} x_1$, que reducidos a dos ecuaciones de segundo orden $\ddot{x}_1 - a_{21}^{\pm} x_1 = 0$, representan de manera evidente dos osciladores armónicos con frecuencias $\omega_1 = \sqrt{|a_{21}^+|}$ y $\omega_2 = \sqrt{|a_{21}^-|}$. Evidentemente las soluciones son del tipo $x_1(t) = A \sin \omega t$, $x_2(t) = A \omega \cos \omega t$ de modo que la trayectoria en el espacio de fase es la elipse $x_1^2/A^2 + x_2^2/\omega^2 A^2 = 1$. Sobre la figura (1) se muestran superpuestas tres trayectorias con semieje mayor vertical, $\omega^2 > 1$, y dos con semieje mayor sobre el eje x_1 , esto es, con $\omega^2 < 1$, de tal manera que unas y otras tienen punto de tangencia. En estos puntos ocurre la conmutación y el estado sigue la trayectoria indicada por las flechas, hasta llegar al origen. La pregunta fundamental es de que manera ocurre la disipación de energía necesaria para llevar el estado hasta el origen, si las dos estructuras son conservativas e no se considera de manera explícita en el modelo, ningún elemento que disipe energía

2- EL ejemplo elemental descrito es clásico en la literatura de sistemas de estructura variable para ilustrar la posibilidad de obtener estabilidad asintótica¹ a partir de dos estructuras que no tienen esta propiedad. Podemos redefinirlo como

$$\ddot{q} = -\omega^2 q \text{ con } \omega^2 = \begin{cases} \omega_1^2 & \text{se } q\dot{q} > 0 \\ \omega_2^2 & \text{se } q\dot{q} < 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde q es posición y $\omega_1^2 > \omega_2^2$ son las dos frecuencias de oscilación. Es claro que la conmutación se efectúa cuando la trayectoria del estado en el espacio de estado cambia de cuadrante, esto es, en los instantes en que posición

1. Estabilidad asintótica implica adicional a la estabilidad, que el estado tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Para definiciones precisas ver referencias (3) y (4).

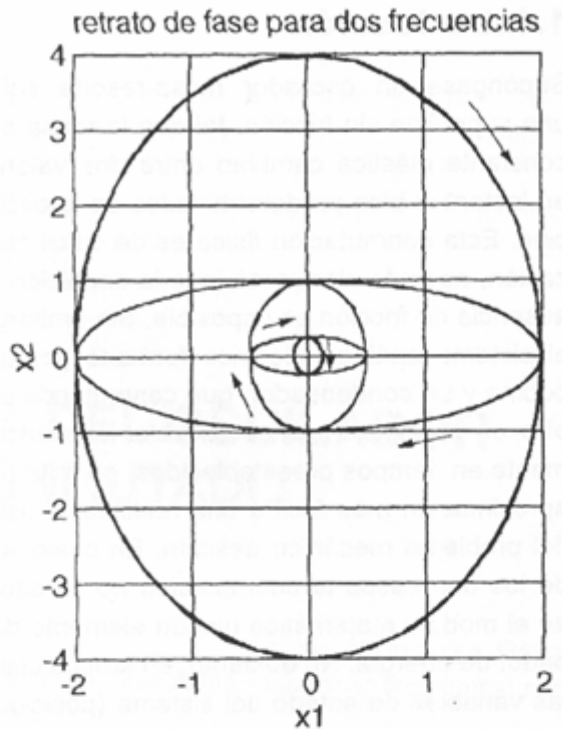


Figura 1: Estabilidad asintótica conmutando estructuras no estables asintóticamente

o la velocidad son cero.

3- La representación en las variables de estado posición q y momentum p del oscilador armónico $\ddot{q} + \frac{k}{m}q = 0$, con función hamiltoniana equivalente a la energía mecánica total

$$H(q, p) = \frac{1}{2}kq^2 + \frac{1}{2m}p^2, \text{ es} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad (3)$$

donde m y k son la masa y la constante elástica del resorte. En esta representación de estado la ecuación de cada trayectoria del retrato de fase en el plano pq es la elipse

$$\frac{q^2}{\Lambda^2} + \frac{p^2}{m^2 \Lambda^2 \omega^2} = 1 \quad (4)$$

donde Λ es la amplitud máxima de la oscilación y $\omega^2 = k/m$.

4. El sistema lineal (1) es continuo por trechos y por lo tanto puede ser analizado separadamente en cada trecho, observando después la continuidad de la solución. Como en cada trecho el sistema es conservativo, la única posibili-

dad de explicar el comportamiento asintóticamente estable de la solución, es aceptar la pérdida de energía en los instantes en que ocurre la conmutación. Esta hecho es confirmado en el análisis que sigue (para las conmutaciones donde la velocidad es cero), a partir de la evaluación de la energía en los puntos extremos de cada trecho. En estos puntos el cálculo es directo debido a que con posición o velocidad nulas, la energía mecánica total es exclusivamente cinética o potencial.

2. Variación instantánea de la energía del sistema.

1. De la ecuación (4) es claro que la trayectoria del estado para el sistema de estructura variable formado por dos osciladores de frecuencias distintas conmutado según la ecuación (1), sigue (a partir de una condición inicial en el primer cuadrante) sucesivamente con cada conmutación, trechos de elipses con semieje mayor vertical y horizontal si

$$\omega_1^2 > \frac{1}{m} > \omega_2^2 \quad (5)$$

Como el estado no cambia instantáneamente, el punto de tangencia de las elipses es el valor del estado en el instante de la conmutación². Así, el comportamiento asintóticamente estable del sistema como un todo, es ilustrado de manera evidente con un primer bosquejo sin necesidad de simulación. El tiempo para cada trecho es $\frac{2\pi}{4\omega_i}$, $i = 1, 2$. Para efectos de ilustración más exacta, la simulación de la figura (2) muestra el retrato de fase para $A = 1.25$, $\omega_1 = 1.25$, $\omega_2 = 0.5\omega_1$, $m = 2$ y condiciones iniciales $p(0) = Am\omega_1$, $q(0) = 0$.³ En la figura (2) se indican

1. Si se escogen como variables de estado, la posición y la velocidad, la representación de estado es

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}$$

y la trayectoria sigue la ecuación. $(q/A)^2 + (p/A\omega)^2 = 1$. Sin embargo en esta representación el Hamiltoniano $H(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}(q^2 + \omega^2 \dot{q}^2)$ no tiene interpretación de energía lo que es fundamental para la argumentación que sigue.

las conmutaciones por números naturales, los trechos por letras y se muestran algunas coordenadas en el instante de cada conmutación. Estas son obtenidas fácilmente mediante la expresión (4) si la condición inicial x_0 es escogida sobre los ejes de la elipse: por ejemplo, para $x_0 = (0, p = m\omega_1 A)$ las coordenadas $\frac{2\pi}{4\omega_1}$ unidades de tiempo después, en el final del trecho antes de la conmutación, son $x(\frac{\pi}{2\omega_1}) = (p/m\omega_1 = A, 0)$. Si la condición inicial fuera $x_0 = (q, 0)$ el estado en la siguiente conmutación será $x(\frac{\pi}{2\omega_2}) = (0, -qm\omega_2)$. Nótese que en trechos sucesivos se alterna la frecuencia; el primer trecho, a , tiene frecuencia ω_1 .

2. El cálculo de energía a lo largo de la trayectoria es directo a partir del cálculo de las coordenadas del estado en el comienzo y fin de cada trecho, y del carácter conservativo del sistema

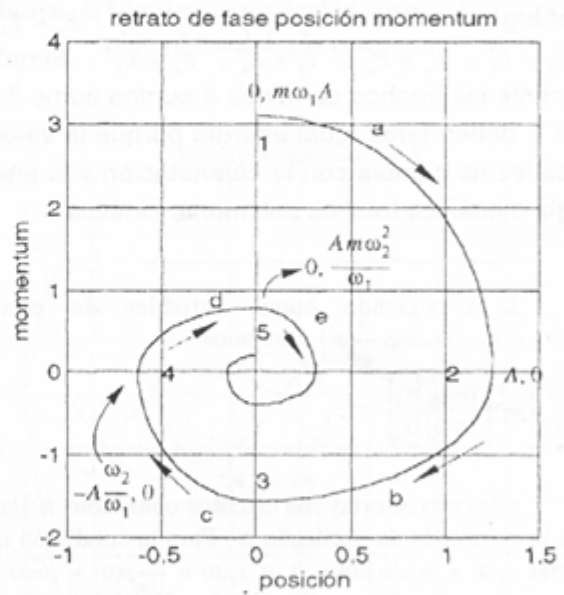


Figura 2: retrato de fase oscilador conmutado

en cada trecho. Como en el comienzo y fin de todos los trechos una de las coordenadas es cero, la energía puede calcularse a partir de la energía potencial $E_p = \frac{1}{2}kq^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ o de la energía cinética $E_k = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$. Por ejemplo, en el trecho a , la energía mecánica total es $E_a = E_k^{1+} = \frac{1}{2}m(A\omega_1)^2$ o $E_a = E_p^{2-} = \frac{1}{2}m\omega_1^2 A^2$, donde el supraindice junto al número de la conmutación indica si el instante considerado es anterior o posterior a la conmutación.

Con la anterior notación, y calculando la energía en cada trecho siempre a partir de la energía potencial $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 q$, tenemos que con $E_a = E_p^{2-}$, $E_b = E_p^{2+}$, $E_c = E_p^{4-}$, $E_d = E_p^{4+}$, $E_e = E_p^{6-}$, $E_f = E_p^{6+}$, etc., obtenemos fácilmente

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{E_c}{E_d} = \frac{E_e}{E_f} = \dots = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \quad (6)$$

porque la coordenada de la posición en los trechos que se relacionan en la ecuación (6), es la misma, y la frecuencia se modifica. Por otra parte,

$$E_b = E_c; E_d = E_e; E_f = E_g \dots \quad (7)$$

ya que la diferencia de coordenadas "se compensa" con la diferencia de frecuencias. Las relaciones indicadas en (7) también se visualizan inmediatamente con los cálculos a partir de energías cinéticas $E_a = E_k^{1+}$, $E_b = E_k^{3-}$, $E_c = E_k^{3+}$, $E_d = E_k^{5-}$, $E_e = E_k^{5+}$, $E_f = E_k^{7-}$, $E_g = E_k^{7+}$. Simplemente los trechos comunes a puntos como 3, 5 o 7, deben tener igual energía porque la velocidades no cambia con la conmutación y la energía mecánica total es solamente cinética.

2. Escogiendo como variables de estado $(x_1, x_2) = (\omega\sqrt{m}q, \frac{1}{\sqrt{m}}p)$, tenemos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

y las trayectorias son círculos con radio R igual a la amplitud de oscilación C . Para la condición inicial $x_1(0) = \omega_1\sqrt{m}q(0) = 0$ y $x_2(0) = \frac{1}{\sqrt{m}}p(0) = \sqrt{m}\omega_1 A$, tenemos $C = \sqrt{m}\omega_1 A$. Como el valor del estado no cambia en el instante de la conmutación, tendríamos siempre trayectorias sobre el mismo círculo y aparentemente la conclusión sobre estabilidad asintótica no sería posible. La solución a este dilema es dada por la relación entre el área S del círculo y la energía en esta representación de estado. El área del círculo es $S = \pi R^2 = \pi m\omega_1^2 A^2$ y la energía mecánica total calculada a partir de la potencial en el instante de amplitud máxima es $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_1^2 A^2$, de modo que $E = 2\pi S$. Con el valor de S anotado, la relación de energías entre el primero y el segundo trecho es

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2},$$

lo que indica la pérdida de energía

3. La relación entre energía y el área de la elipse definida por la trayectoria cerrada en el espacio de estado del sistema (3) también es ilustrativa. La energía $E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A$ y el área de la elipse es $S = \pi m\omega A^2$ de modo que se obtiene $E = S\omega/2\pi$ y entonces,

$$\frac{E_a}{E_c} = \frac{S_a\omega_1}{S_c\omega_1} = \frac{\pi m\omega_1 A^2}{\pi m\omega_2 A A(\omega_2/\omega_1)} = 1 \text{ mientras que}$$

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{S_a\omega_1}{S_b\omega_2} = \frac{\pi m\omega_1 A^2\omega_1}{\pi m\omega_2 A^2\omega_2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}.$$

De las relaciones (6) e (7) se observa que la disminución de la energía sucede solo en las conmutaciones donde la velocidad es cero, o sea cuando la masa está en la posición de amplitud máxima y mínima.

4. La suma de las infinitas pérdidas de energía debe ser igual a energía inicial. En efecto, considerando que las relaciones entre los valores de energía después de cada conmutación i donde ocurre pérdida de energía son

$$\frac{E_{i+1}}{E_i} = r^2 = (\omega_2/\omega_1)^2 \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty,$$

se forma la serie

$$\sum \Delta E = E_0(1-r^2)(1+r^2+r^4+r^6+\dots),$$

que converge a E_0 , el valor de la energía inicial.

En la figura (3) se ilustra la conservación de la energía en cada trecho y las sucesivas disminuciones en los instantes donde la energía cinética es cero, para los valores de la simulación de la figura (2).

3. Interpretaciones físicas: la naturaleza de la fuerza.

1. Es ilustrativo observar el movimiento sobre la función de energía potencial a la manera clásica como es efectuada para determinar los límites del movimiento en sistemas conservativos. En nuestro caso, sobre las dos funciones de potencial definidas por las conmutaciones.

3. El primer trecho transcurre en una elipse "parada". Obsérvese que la escala horizontal y vertical en la figura, son diferentes.

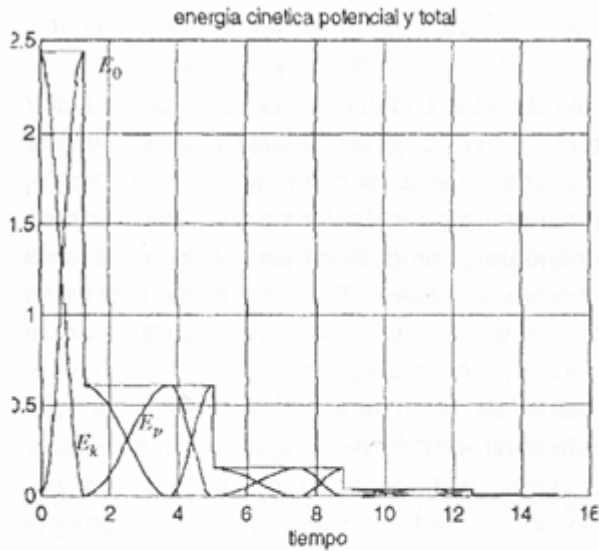


Figura 3: Variación de la energía mecánica total

Se trata de construir a partir de una energía inicial E_0 , los límites de la oscilación de una partícula entre dos funciones de potencial que conmutan. Las dos funciones de potencial son $U_1(q) = \frac{1}{2}m\omega_1^2 q^2$ y $U_2(q) = \frac{1}{2}m\omega_2^2 q^2$. La posible trayectoria se muestra en la figura (4), indicando con letras los mismos trechos mostrados en la figura (2). Obsérvese la variación finita de la fuerza elástica (derivada da función potencial) en los puntos de amplitud máxima de elongación del resorte y la reducción finita de energía en esos mismos puntos.

Finalmente, la figura (5) muestra la posición q , la velocidad \dot{q} y la fuerza elástica $f = -kq = -m\omega^2 q$. Obsérvese la discontinuidad de la fuerza en los instantes de la conmutación y el salto solamente en las conmutaciones donde la velocidad es máxima y la posición es cero¹.

Sin embargo, la fuerza en los puntos de discontinuidad no es impulsiva pues no hay variación instantánea de la cantidad de movimiento. La variación instantánea de la fuerza es de difícil interpretación física en el sistema masa resorte analizado porque estará asociada a una función

1. La forma y valores de la figura (5) es completamente previsible sin simulación. Los saltos aparecen porque en los instantes de la conmutación con posición máxima, la fuerza varía instantáneamente debido al cambio de frecuencia.

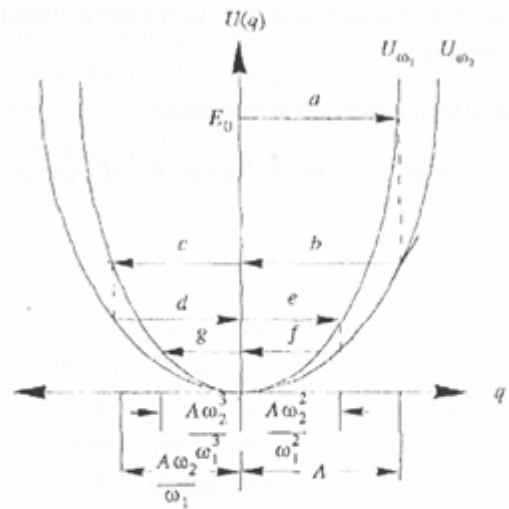


Figura 4: Límites da oscilación con dos funciones de potencial que conmutan

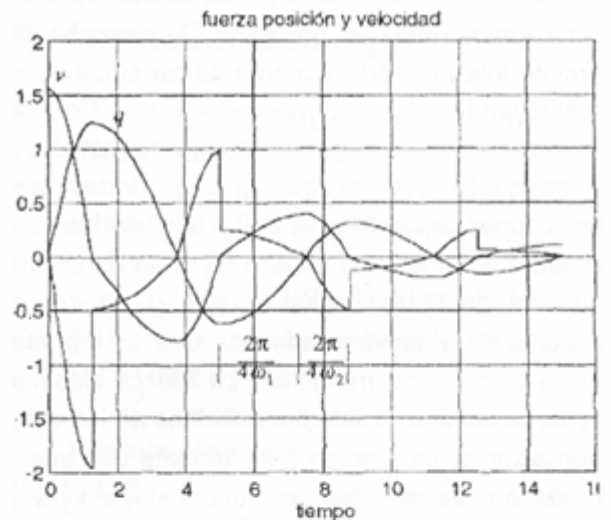


Figura 5: fuerza elástica, posición y velocidad

impulsiva de magnitud masa multiplicada por la derivada de la aceleración, de manera que $\int \delta_{m\ddot{a}} = F$.² Una analogía eléctrica para la fuerza es el voltaje. Como la variación instantánea del voltaje en un condensador es de inter-

2. Si la fuerza fuera impulsiva tendríamos $\int \delta_p = i = m(v_2 - v_1)$. El subíndice en la función impulso indica su unidad física.

pretación directa, y está asociada a una corriente impulsiva, se estudia a continuación el oscilador conmutado análogo al sistema mecánico analizado.

2. El oscilador eléctrico conmutado.

El circuito eléctrico de la figura (6) ofrece una

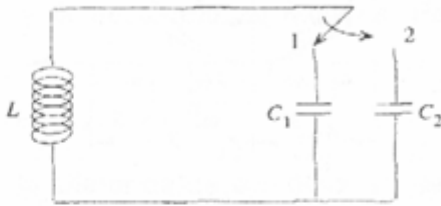


Figura 6: Oscilador armónico conmutado eléctrico

interpretación física más completa y razonable desde el punto de vista de la realización del sistema conmutado. La ecuación (1) describe el circuito interpretando q como carga eléctrica y sustituyendo $\omega^2 = k/m$ por $\omega^2 = 1/LC$. Con la representación de variables de estado, carga q , y momento generalizado $p = L\dot{q}$, todas las ecuaciones desarrolladas arriba son válidas con sustituir m por L , k por $1/C$ y la amplitud máxima de la oscilación A por Q , la carga máxima en el condensador C_1 , que es lograda en la primera conmutación. La fuerza elástica kq debe ser substituida por el voltaje en los condensadores. La función hamiltoniana con interpretación de energía es $H(q, p) = \frac{1}{2C}q^2 + \frac{1}{2}L\dot{q}^2$, siendo el primer término la energía acumulada en el campo eléctrico del condensador activo, y el segundo término la energía acumulada en el campo magnético del inductor. Todas las figuras también son válidas con las sustituciones anotadas. Las figuras (2) a (5) se interpretan de la siguiente manera: el primer trecho con el interruptor en la posición 1 y el condensador C_1 conectado, se inicia con toda la energía en el inductor (coordenadas: $0, L\omega_1 Q$) y finaliza con toda la energía en el condensador C_1 , que tiene en el instante de la primera conmutación la

máxima carga. El inductor se opone a los cambios súbitos de corriente, y por esto en el instante de esta conmutación la rama del inductor se comporta como un circuito abierto. Sucede entonces durante la conmutación una transferencia de carga instantánea entre los dos condensadores, produciéndose entre ellos una corriente impulsiva. Esta corriente explica el cambio súbito de voltaje que aparece en la figura (5) (por analogía, gráfico de fuerza) en el instante de la primera conmutación, y la aparente contradicción de la figura (5) que muestra un cambio instantáneo en el voltaje de los condensadores junto con una función de corriente continua (si bien que no derivable) que permanece en cero durante la conmutación. La explicación para esta contradicción aparente es que en la figura (5) se muestra la corriente que circula por el inductor y no el impulso de corriente entre los dos condensadores, que ocasiona la variación instantánea finita de voltaje.¹ La transferencia de cargas instantánea entre los dos condensadores implica una disminución de energía como se verá en el siguiente ítem.

En la segunda conmutación el cambio de condensadores sucede cuando están descargados de modo que entre ellos no hay ninguna transferencia de carga. El único efecto es el cambio de la frecuencia de oscilación.

3. Transferencia de carga instantánea entre dos condensadores.

Considérese la conexión de dos condensadores C_1 e C_2 con voltajes diferentes $V_1 = q_1/C_1$ y $V_2 = q_2/C_2$ antes de la conexión. En el instante posterior a la conmutación los voltajes deben ser iguales a $V^* = (q_1 + q_2)/(C_1 + C_2)$.² Considerando la conservación de la carga $q_1 + q_2 = q_1 + q_2$ tenemos que las cargas en los condensadores después de la conmutación son

1. El condensador "se opone a los cambios súbitos de voltaje", a menos que la corriente sea un impulso, que es precisamente lo que sucede entre los condensadores en el instante de la transferencia de las cargas

2. $q_1^* + q_2^* = C_1 V_1^* + C_2 V_2^* = (C_1 + C_2) V^*$.

$$q_1^* = V^* C_1 = (q_1^* + q_2^*) \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad \text{y} \quad (8.a)$$

$$q_2^* = V^* C_2 = (q_1^* + q_2^*) \frac{C_2}{C_1 + C_2} \quad (8.b)$$

Así, tenemos una transferencia instantánea de carga que implica un impulso de corriente con intensidad igual a la diferencia de las cargas, esto es, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_i = \Delta q$.

La energía antes de cerrar el circuito es $E^* = q_1^2/2C_1 + q_2^2/2C_2$ e inmediatamente después es, considerando los resultados (8.a) y (8.b),

$$E^* = q_1^2/2C_1 + q_2^2/2C_2 = (q_1^* - q_2^*)^2/2(C_1 + C_2),$$

y por lo tanto la pérdida de energía en la conmutación es

$$\Delta E = \frac{(q_1^* C_2 - q_2^* C_1)^2}{2(C_1 + C_2)C_1 C_2} \quad (9)$$

Si los dos condensadores son iguales, la ecuación (9) se reduce a $\Delta E = (q_1^* - q_2^*)^2/4C$ que se hace cero si antes de la conmutación las dos cargas (o los dos voltajes) de los condensadores son iguales. En ese caso, en el instante de cerrar el circuito no hay corriente, lo que sugiere claramente que la pérdida de energía está asociada al impulso de corriente de la transferencia instantánea de cargas.

Esto es más plausible estudiando el proceso de transferencia de cargas entre dos condensadores conectados a través de una resistencia y calculando la energía disipada en la resistencia R durante el tiempo del transitorio. En el límite cuando la resistencia tiende a cero tendríamos nuestro caso de estudio. Considérese el circuito descrito con cargas iniciales $q_1^* \neq 0$ e $q_2^* = 0$.

En este caso la corriente es $i(t) = \frac{q_1^*/C_1}{R} e^{-t/RC_{eq}}$, donde $C_{eq} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2)$ es la capacitancia equivalente de los dos condensadores en serie vistos desde la resistencia. La energía disipada por la resistencia $w = \int_0^{\infty} i^2(t) R dt$ es igual a

$$w = \frac{1}{2} q_1^2 \frac{C_2}{C_1(C_1 + C_2)} \quad (10)$$

que es la energía inicialmente acumulada en el condensador. La integral que da como resultado (10) no depende de la resistencia y coincide con (9) en el caso $q_2^* = 0$.

Obsérvese que la potencia

$$p(t) = \frac{(q_1^*/C_1)^2}{R} e^{-2t/RC_{eq}}$$

es una función impulsiva cuando $R \rightarrow \infty$, esto es, una amplitud infinita con una integral finita. Esto responde nuestra pregunta básica sobre la pérdida de energía en un modelo donde no existen elementos disipativos. Así, coloquialmente podemos explicar la pérdida de energía como el resultado de un proceso límite de disipación en tiempo cero, de una potencia indeterminada formada por una corriente que tiende a infinito a través de una resistencia que tiende a cero.

Referencias Bibliográficas

- [1] E. Butkov. *Mathematical Physics*. Addison Wesley. New York. 1973.
- [2] R. DeCarlo, S. Zak., S. G. P. Matthews. Variable structure control of nonlinear multi-variable systems: a tutorial. *Proceedings IEEE*. vol 76, (3):212-231. March 1988.
- [3] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Macmillan Publishing Co. 1992.
- [4] J.J Slotine, W. Li. *Applied nonlinear control*. Prentice.Hall. 1991.
- [5] V.I. Utkin. *Sliding modes and their application in variable structure systems*. Mir. 1978.
- [6] V.I. Utkin. Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-22, (2):212-222, April 1977.