¿QUE HAY DETRÁS DE LAS DIFICULTADES QUE PRESENTA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE NÚMERO REAL?

Gloria García O., Celly Serrano, Hernán Díaz [*]

Abstract

This article is based upon the concept of epistemological obstacle, error and difficulty An epistemological curriculum and cognitive analysis is carried out, with first semester students, to try to determine the motives for the difficulties in the comprehension of the concept of real number. Using the result of the analysis, suggestions for teaching the concept of real number are made.

INTRODUCCION

La enseñanza y el aprendizaje del concepto de número real genera muchas dificultades en profesores y alumnos. Tradicionalmente en la enseñanza de las matemáticas, su procedencia se ha adjudicado a las capacidades intelectuales del estudiante, pero en los últimos veinte años, esta concepción ha venido siendo desvirtuada para situar la procedencia de las dificultades no sólo en las capacidades del estudiante, sino también en el ámbito escolar, en los factores externos a la propia escuela, los cuales hacen parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, y en la propia constitución de los objetos matemáticos.

Particularmente la reflexión sobre la propia constitución de los objetos matemáticos, es quién aporta de manera contundente para modificar el concepto de dificultad de aprendizaje asociado a lo cognitivo y asociarla a dificultad conceptual surgida del propio proceso de constitución de los objetos matemáticos.

De otro lado, desde la perspectiva curricular, la enseñanza del concepto de número real se introduce en los niveles de la Educación Básica casi en todos los países. En el sistema educativo colombiano las secuencias y presentación ordenada que le precede es la construcción de los sistemas numéricos: naturales, enteros y racionales. El enfoque que se privilegia es la presentación de estructura algebraica, con énfasis en la utilización de símbolos algebraicos y el manejo y construcción de operadores unarios y de operaciones binarias de acuerdo a las necesidades que requiera cada sistema.

De otra parte as investigaciones en educación matemática y especialmente las que conciernen al aprendizaje, errores y dificultades ponen de manifiesto que la problemática de la comprensión del número real reside principalmente en la comprensión de características, procedimientos y conceptos que subyacen a la misma estructura lógica que lo define axiomáticamente. Estos estudios, fundamentados sobre posiciones epistemológicas distintas a la concepción de la matemática como producto, han conducido a reformulaciones importantes y a planteamientos distintos sobre el tratamiento del concepto de número real en la secundaria. Así, el aspecto puramente numérico, las representaciones decimales, se ha convertido en los intermediarios para iniciar el camino

[*] Profesores Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional

a la comprensión del concepto de número real. Desde esta perspectiva, se propone explicitar el carácter introductorio que presentan los reales en la construcción del continuo matemático, para postergar su construcción como estructura algebraica a otros niveles del sistema educativo.

Es en este sentido, que el objetivo de este trabajo presenta los resultados de un estudio realizado para analizar los motivos de las dificultades que presenta la comprensión del concepto de número real, desde un enfoque epistemológico, curricular y cognitivo.

Obstáculos, errores y dificultades en el conocimiento matemático

La respuesta al interrogante formulado como título a este trabajo *¿Qué hay detrás de las dificultades que presenta la comprensión del concepto de número real?* sintetiza en gran medida la presencia necesaria para la Educación Matemática de estudios históricos, filosóficos y epistemológicos sobre las matemáticas. Desde la perspectiva epistemológica de G. Bachelard la noción obstáculo epistemológico es asumida y re-construida para la Didáctica de las matemáticas por G. Brosseau (1983). En las perspectivas epistemológicas formuladas por Popper, Lakatos y Russell, L. Rico (1984, 1995) reconstruye el papel del error en el aprendizaje de las matemáticas.

Para situar al lector en la comprensión e importancia de estos conceptos, y sus interrelaciones, para la educación matemática a continuación describimos los presupuestos en que se asientan uno y en otro enfoque.

Para Bachelard el acto de conocer presupone conocer en contra de conocimientos anteriores, pues en general el proceso normal de construcción de los conocimientos ha estado acompañado por la superación de modos de *conocer* que no son adecuados para enfrentar la solución a nuevas situaciones y problemas que exigen cambios en la teoría existente. Los conocimientos satisfactorios para resolver una cierta clase de problemas se convierten en obstáculos en el pensamiento por cuanto se vuelven inadecuados para asumir cambios en las teorías existentes.

Brosseau, en su teoría de los Obstáculos Cognitivos, señala que todos los estudiantes poseen concepciones sobre determinadas nociones, que en algunas ocasiones se revelan falsas, insuficientes, ineficaces o inadaptadas para la resolución de situaciones y problemas lo que provoca errares repetitivos y resistentes, convirtiéndose en obstáculos en el surgimiento de nuevas concepciones. En esta perspectiva, s claro entonces que la manifestación de obstáculos en los estudiantes es una manifestación caracterizada por:

conocimiento y no ausencia de conocimiento
este conocimiento le permite producir respuestas y soluciones a determinadas situaciones y problemas
a su vez, este conocimiento es el responsable de respuestas erróneas para otro tipo de problemas.

Brosseau señala que los obstáculos se manifiestan en los estudiantes en los errores y clasifica los obstáculos que se presentan en los estudiantes según su origen en los siguientes tipos:

De origen ontogenético: debido a limitaciones del sujeto en un momento de su desarrollo. Este tipo de obstáculo esta asociado a las capacidades cognitivas del estudiante.

De origen didáctico: asociado al sistema de enseñanza en el que se encuentra inmerso el estudiante (currículos, textos). Se localizan en decisiones del sistema educativo o en las del profesor en el aula.

De origen epistemológico: asociados al conocimiento matemático, se encuentran en La evolución de los conceptos y hacen parte del significado del mismo.

Esta clasificación, permite a la Didáctica de las Matemáticas desligar la can natación cognitiva exclusiva del significado de dificultad. Los orígenes didáctico y epistemológico, por su parte propician vías de solución para su tratamiento.

Desde la perspectiva epistemológica que se preocupa par la falibilidad del conocimiento (popper, Lakatos), se reconoce que el error' es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento" (Rico, 1984, p. 188); su estudio debe incluir las condiciones que lo hacen posible y las funciones que desempeña en el dominio y avance de la ciencia. Particularmente Lakatos, en su estudio sobre el descubrimiento y elaboración de conceptos matemáticos sostiene que los errores son parte del proceso usual de construcción de los conocimientos matemáticos. Por consiguiente, el proceso de construcción del conocimiento matemático debe incluir el diagnóstico y la superación de los mismos.

En el terreno de la práctica, es en los procesos de aprendizaje, donde se manifiestan los errores y las dificultades. Estas últimas emergen cuando la solución de un problema exige el enriquecimiento estructural del concepto, es decir, cuando se precisa un cambio importante en la teoría matemática correspondiente para solucionar el problema (El Bouazzoui, 1988).

Estas contribuciones y sus respectivas reconstrucciones para la educación matemáticas traen consigo serios cuestionamientos al tratamiento y valoración con que la enseñanza de las matemáticas ha manejado los errores y las dificultades. Respecto al tratamiento, este no puede ser asumido ni por *explicaciones cada vez más claras y precisas* ni tampoco, por la ejercitación repetitiva y tediosa. Muy al contrario, lo que se precisa es de *rupturar* la satisfacción de un conocimiento que ha servido para solucionar ciertas situaciones, por tanto es a través de la construcción de actividades de aprendizaje novedosas y cuestionadoras, parlas que se logra tal ruptura.

De igual forma la valoración del error y la concepción sobre dificultad, puede llegar a establecer la línea divisora entre estereotipos de profesor (Rico, 1984). En la línea convencional, sesgada por la herencia de las capacidades necesarias para aprender matemáticas, el error y la dificultad son consideradas como el dato objetivo que demuestra el desconocimiento o la ignorancia del estudiante. Por tanto debe ser corregido o penalizado. Para un profesor que comparte los planteamientos modernos descritos, el error es la muestra de un conocimiento parcialmente construido resultado de un proceso en curso, a cuya evolución el profesor debe contribuir evitando las sanciones" (Rico, 1984, p. 186).

Finalmente cabe señalar que el reconocimiento al error como parte del proceso de construcción del conocimiento le otorga una dimensión positiva, pues es una manifestación de conflicto cognitivo entre conocimientos anteriores y las situaciones nuevas, lo que conduce a crear situaciones para reorganizarlas y ajustarlos con el fin de producir un aprendizaje significativo para el estudiante.

Retomando el papel del error en la construcción del conocimiento y la clasificación de sus orígenes en la perspectiva de la didáctica, a continuación se expone el motivo de las dificultades para comprender el concepto de número real.

Los motivos de las dificultades: ¿el origen epistemológico?

Para identificar las dificultades de origen epistemológico en la construcción del concepto de número real, nos hemos basado en los estudios que sobre dicho concepto y sobre el continuo matemático y la continuidad han realizado Romero (1996, 1997) y Rigo (1995) con el fin de establecer los problemas, nociones, procedimientos y conceptos que han estado presentes en la constitución del número real.

Romero identifica las siguientes tres etapas históricas cruciales en la constitución del concepto de número real:

Descubrimiento de la irracionalidad: realizada en el contexto de la matemática griega, más precisamente en el terreno de la medición de longitudes. Surge cuando no se puede plantear la existencia de longitudes cuya relación no puede expresarse en términos de la relación de enteros" (Gadiner, citado por Romero, 1997, p.66). La segunda etapa la sitúa, en el seno de la discusión que generó el tratamiento de sí los decimales infinitos no periódicos eran números o no, a raíz de los desarrollos realizados por Stevin (s.XVI) sobre las fracciones decimales. La tercera etapa, la identifica con la "construcción formal del concepto del número real" (s. XIX). Romero señala: esta etapa se caracteriza por la fundamentación lógica que realiza Dedekind, sobre el número irracional y las realizadas por Cantor y Weirstrass sobre el número real.

De la primera etapa, se puede deducir que el problema de la irracionalidad es un problema que surge en un contexto muy específico, el de la geometría griega, de medición teórica, pero en él mismo subyace el problema de los procesos infinitos.

En lo que concierne a lo numérico la irracionalidad también aparece asociada y justificada por los radicales cuadráticos, su existencia se reduce a la demostración por reducción al absurdo. Pero en este tipo de presentación se elude de nuevo el problema del proceso infinito. A su vez, las notaciones decimales también enfrentan el problema del de los procesos infinitos y del infinito actual.

Finalmente aparece la relación entre el número real y el continuo numérico. Esta última enfrenta de nuevo al problema del infinito actual y la analogía con las propiedades y operatividad del continuo geométrico ideal.

Rigo (1993, 1995) desde la perspectiva de la construcción del continuo matemático describe la relación entre la construcción del concepto de número real y la construcción del continuo numérico. Rigo, en el estudio sobre Dedekind, identifica cómo a través de la construcción del concepto de número real introduce la definición aritmética de la continuidad; construye primero, de manera lógica y axiomática la continuidad de la recta geométrica, para pasar a construir una estructura numérica con las mismas propiedades de la recta, y establecer el isomorfismo entre el continuo y la recta.

Los procesos y la operatividad que subyacen en estas construcciones son la actualización de procesos infinitos y la aceptación de conjuntos actualmente infinitos.

El problema del infinito y la aceptación de la actualidad tanto al exterior como al interior se presenta como el concepto clave en la construcción del concepto de número real, su evolución conceptual es parte esencial de esta construcción, por consiguiente amplia de manera sustancial la mirada que desde la perspectiva educativa de las matemáticas debe hacerse para establecer los obstáculos que se presentaron en la construcción de dicho concepto, pues como tal infinito mismo se torno en un problema para su constitución.

Una mirada a diversos estudios históricos y epistemológicos (Moreno y Waldegg 1991, Arboleda y Recalde, 1993; D' Amore 1996) sobre la evolución conceptual del infinito permite afirmar que desde las postulaciones de Aristóteles se acepta el infinito en extensión y el infinito al interior solo de manera potencial, es decir sin existencia por si mismo. Euclides al concebir la serie de números naturales como resultado di un proceso iterativo, mediante el cual se genera un nuevo número en cada paso, da cabida a esta idea sobre el infinito. Con el desarrollo de la nueva cosmología, (de mundo geocéntrico, e incluso antropocéntrico de la astronomía griega y medieval al mundo heliocéntrico) que se inicia con los trabajos de Keppler y Galileo, el problema del infinito se torna de orden metafísico. A la concepción de un mundo ordenado finito se impone la concepción del universo indefinido, aun infinito, que se unifica mediante leyes y no por la subordinación natural, lo que contradecía el carácter que se le adjudicaba desde la mitología griega, pertenecía sólo a los dioses.

En la aceptación de procesos infinitos potencialmente subyace la hipótesis de la prolongación indefinida del tiempo, lo que se convierte en un obstáculo para la conceptualización del infinito actual, fundamentado sobre operaciones lógicas atemporales, desligadas de un orden cronológico. Para Moreno y Waldegg, la aceptación de la matemática griega de los procesos infinitos como acciones cuyo punto final no existe, y por consiguiente la aceptación del infinito potencial es la base para desarrollar nuevos objetos conceptuales como es el del infinito actual. La construcción de este nuevo ente matemático es totalmente distinta a la concepción de los entes particulares que producen los procesos infinitos.

Con los acercamientos descritos a la estructura compleja que conforma el concepto de número real y teniendo en cuenta que la matemática escolar reconstruye de manera distinta la naturaleza del conocimiento matemático (Chevellard, 1991), somos conscientes que los obstáculos epistemológicos por si solos no pueden se trasladados hacia los procesos de aprendizaje, ellos deben ser integrados a los resultados que desde los estudios cognitivos y desde las otras disciplinas se conforman para especificar lo propiamente didáctico. Por tal razón, en el caso que nos ocupa, abordamos a continuación la naturaleza institucional, como se presenta en e currículo colombiano el concepto de número real.

Las dificultades en la propuesta curricular

El saber escolar, que aparece en los programas curriculares y en los textos ha sufrido una serie de adaptaciones en los que se manifiesta, entre otros aspectos concepciones, obstáculos y dificultades, todas ellas relacionadas con el saber científico, en nuestro caso matemático (Chevellar, 1991), por tal razón su análisis nos puede permitir extraer consecuencias pertinentes para ampliar el campo de indagación sobre el interrogante formulado al inicio de este trabajo. Particularmente, en la enseñanza de las matemáticas se han identificado concepciones históricas presentes en las distintas reformas curriculares realizadas. Específicamente, la reforma conocida como la Reforma de la matemática Moderna, que introdujo la ideología Bourbaki como filosofía en los currículos para la enseñanza de las matemáticas en la primaria y la secundaria, trajo como consecuencia la concepción de presentar a los conceptos matemáticos desde su versión más abstracta, concediéndole prioridad al manejo riguroso de la notación simbólica, a la teoría de conjuntos y a su lenguaje como unificador y, a la versión axiomática del álgebra, entre otros aspectos.

Las reformas curriculares en el país no han estado exentas de estas posiciones, el Marco general que describe las características de la Renovación Curricular (Ministerio de Educación Nacional, MEN, 1991) y aún vigente para el sistema educativo, comparte esta concepción pues considera que para la comprensión de conceptos y procesos matemáticos se requiere de un mínimo de teoría de conjuntos y la introducción de un mínimo de simbolismo formal a lo largo de toda la Educación Básica, (MEN, Marco General, Matemáticas Propuesta de Programa Curricular, 1991, p. 8). En lo que se refiere a la presentación de los sistemas numéricos, estos se abordan desde el enfoque de sistemas, como enfoque que suministra una organización o estructura de carácter general para el área (MEN, 1991, p.13). Específicamente, para los números reales se formula una propuesta de construcción en el grado octavo y el sistema de los números reales se formula para el grado noveno. La construcción se realiza mediante el enfoque de operadores ampliadores y reductores de longitudes. La propuesta incluye también el tratamiento a la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad, especial atención merece algunos casos de inconmensurabilidad de longitudes. Y agrega la introducción de nociones del álgebra como un sistema simbólico necesario para obtener símbolos para los resultados, a través de la mera manipulación de los símbolos de los argumentos” (MEN, 1991, p. 33).

Se inicia la propuesta de aproximación a los reales, con la identificación de operadores ampliadores y reductores de longitudes, haciendo énfasis en la necesidad de insistir en la “construcción de operadores ampliadores y reductores conceptuales, construidos por el cerebro”, (MEN, 1991, p. 35) puesto que se considera crucial esta construcción para la comprensión del sistema conceptual de operadores y transformadores con sus respectivas operaciones y relaciones y los sistemas simbólicos que se utilizan para representar los números reales.

En cuanto al tratamiento de la conmensurabilidad, el modelo didáctico es de orden teoría práctica, pues se señala que esta debe formularse teóricamente para verificarla empíricamente la hipótesis. Esta forma de abordar la conmensurabilidad, hace a un lado el trabajo con estimaciones y aproximaciones de medida, lo que interesa es la existencia de un operador ampliador o reductor racional que permita expresar una de las longitudes en términos de la otra. Así mismo se llama la atención para identificar relaciones, binaria, simetría que existe entre las dos longitudes y aún transitiva y reflexiva. Llama la atención para señalar que los ampliadores y reductores actúan como transformadores para cualquier longitud, pues si no se tiene en cuenta esta característica las longitudes que aparentemente son conmensurables en la práctica no lo serán en la teoría.

En particular el tratamiento de la inconmensurabilidad se centra en la demostración del Teorema de Pitágoras, desde situaciones geométricas de medición, para posteriormente introducir ampliadores y reductores no racionales. La demostración de operadores irracionales como √2 se realiza recurriendo a la demostración por el absurdo. Luego se utilizan ampliadores como √3, √5, .. .con construcciones geométricas elaboradas sobre rectángulos.

Una consecuencia didáctica que se deriva, es la de plantear la irracionalidad en este contexto, pero a las prácticas de medición en este contexto debe preceder prácticas con instrumento como la comparación de longitudes, pues de otra manera es casi imposible constatar la condición de inconmensurabilidad sobre figuras. Estos ampliadores son también identificados como las raíces cuadradas de números primos, se identifica las raíces cuadradas de números compuestos como no racionales, pero únicamente se señala que la demostración de que no son racionales “no es tan fácil”. Con esta presentación se sugiere a los profesores la conveniencia de que los estudiantes “busquen un número suficiente de operadores irracionales tanto ampliadores como reductores hasta caer en la cuenta de que no se puede hacer una lista completa de estos y de que el cerebro puede seguir construyendo muchos más “(MEN, 1991, p. 44).

La representación en la recta graduada, se asume desde su continuidad intuitiva, lo importante es fijar un origen, determinar una longitud unitaria par representar ampliaciones y reducciones racionales e irracionales de la longitud unitaria. Lo importante señala el documento, es “domesticar la recta” es decir fijar el origen y determinar la longitud unitaria. La construcción de los reales se completa con la presentación de operadores reflectores, simbolizados - ( ), estos se clasifican en reflectores ampliadores del tipo, -√2, -√3... y en reflectores achicadores del tipo $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Para la presentación oficial de los números reales el documento señala, que hay que “olvidarse del carácter activo de estos operadores reales, para obtener el conjunto numérico de los números reales” (MEN, 1991, p 48), ya continuación señala que es a este conjunto se le simboliza usualmente con la letra $\mathcal{R}$. La simbolización de estos números se identifica con símbolos como ℓ л con las notaciones radicales que son raíces indicadas “no expresables exactamente con fracciones ni con decimales infinitos”. Conviene subrayar que en esta presentación es la primera vez que se alude a los decimales como formas de expresión de números, más simbólicos de operadores racionales y de los reales. Sobre la base de este presupuesto, se presentan las expresiones decimales como otra forma de representar las fracciones decimales. Se relaciona así al operador racional con expresiones decimales periódicos o decimales infinitos periódicos. Sobre esta relación entre representaciones de expresiones, se formula la pregunta “,Existirá algún decimal no periódico e infinito? De ser así ¿qué clase de número representarla?” (MEN, 1991 p. 51), el texto se contesta señalando que si existen y también las reglas para obtenerlos, da ejemplos y a estas expresiones las denomina representaciones de un operador irracional.

El problema de la representación de operadores reales en su versión decimal en la recta, es abordado desde la posibilidad de “continuar representando indefinidamente números” reales sobre la recta que se asume doblemente infinita, por la posibilidad de prolongación indefinidamente en ambos sentidos. El acento de la herramienta del microscopio, subdivisión de intervalos en la recta para números irracionales, se utiliza para obtener expansiones decimales.

En general puede afirmarse que este tipo de presentaciones de los números reales, es coherente con la concepciones de la reforma de la matemática moderna para a educación matemática por cuanto mezcla concepciones que subyacen en la presentación del saber matemático escolar como un conocimiento sesgado por el interés teórico, riguroso y en búsqueda de la precisión que estuvo presente en el pensamiento griego de la matemática y en la filosofía que impulso la reforma de las matemáticas moderna. Un ejemplo lo constituye los llamamientos implícitos que hace el texto para identificar y distinguir el interés por las mediciones exactas, identificándola “como un valor que la humanidad ha tenido en alta estima” y relegando al problema de la aproximación y estimación a la práctica de la medición.

Esta presentación de las matemáticas asumió que la formulación de las matemáticas escolares solo era cuestión de un isomorfismo con la matemática científica. De aquí, que se traslade a ellas cuestiones tan profundas y teóricas como el problema de la conmensurabilidad e inconmensurabilidad, desligada la primera de la presentación de los problemas en el terreno de la medición y el tratamiento que se da a la misma en el terreno geométrico. Este tipo de presentaciones trae consigo, lo que Chevellard denomina necesidad de recurrir a evidencias, para hacer ver la ausencia de conceptos que aun hacen falta para completar la definición y tratar con esta herramienta de evitar las confusiones que pueda presentar la definición. Un ejemplo claro de esta situación es el continuo llamado que hace el texto para reiterar que el operador es una cuestión de cerebro y el llamado a olvidar el carácter activo de los operadores reales, en donde operador real significa objeto concreto.

Las dificultades que presentan los estudiantes

Este aparte del presente estudio, debería ocupar el primer lugar de exposición en el trabajo por cuanto es el motivo que originó la indagación que hemos descrito. En a práctica, como docentes de matemáticas para estudiantes que ingresan a los programas de formación inicial de profesores en ciencias y matemáticas nos encontramos que uno de los núcleos centrales de la enseñanza de la matemática en el primer nivel, es precisamente el número real, desde su estructura algebraica, campo ordenado o como estructura numérica que completa otros sistemas numéricos.

El acento que se coloca en uno y otro enfoque, es en el sistema simbólico algebraico pero, la realidad cognitiva de los estudiantes para pensar e interpretar los reales muestra la profunda contradicción entre la estructura ideal e incuestionable de los reales y las nociones, ideas y concepciones de los estudiantes

Esta contradicción se expresa de diversas formas, por ejemplo, donde los reales requieren ser usados en cuestiones elementales para estos niveles, como es el trazado de gráficas de funciones de variable real o el trabajo con sus representaciones decimales. En la primera situación, hemos encontrado que en el uso para el trazado de gráficas de funciones de variable real, este último atributo de la función no tiene significado alguno para los estudiantes porque en situaciones de construcción de la gráfica, vía traducción ecuación-gráfica, los números que utilizan son los enteros, sin embargo la gráfica es siempre continua, por el supuesto intuitivo de la continuidad de las rectas geométrica que conforman el sistema cartesiano.

En cuanto al uso de las representaciones decimales también podemos afirmar que como han demostrado las diversas investigaciones realizadas al respecto, las ideas y nociones de los estudiantes actúan a manera de obstáculos para aceptar que expresiones como 0.333..., puedan ser consideras como números. A lo anterior se agrega, que la idea de número se encuentra asociado a la de cantidad, portal razón, utilizando términos matemáticos el conjunto numérico más aceptado es quizá el de los racionales. Además el significado de la palabra real en el uso diario se arrastra hacía la matemática.

En términos generales, estos desencuentros entre las nociones de los estudiantes y la enseñanza de estructuras matemáticas ideales, como la del número real nos condujo a indagar sistemáticamente para construir una investigación, la cual se ha orientado hacia el estudio del Cálculo como un campo conceptual.

Como una primera respuesta a las cuestiones formuladas para caracterizar el campo conceptual del Cálculo, elaboramos un cuestionario, tomando como referencia los construidos por investigadoras como Rigo y Romero específicamente, con el fin de realizar un estudio descriptivo y cualitativo de las dificultades asociadas a la comprensión del número real. Asumimos la comprensión de los conceptos matemáticos desde la perspectiva de Sierpinska, (1994) para señalar que las posibilidades de la comprensión de conceptos matemáticos se encuentran determinadas por la coordinación de sus diversos registros de representación. También acogemos la propuesta que diversos investigadores han elaborado (Kaput, 1992; Duval, 1993) para establecer que a un mismo concepto están asociados diversos sistemas de representación, semióticos para Duval.

Con base en estas consideraciones, el instrumento utilizado se estructuró un cuestionario sobre los siguientes ítems:

Contenido	Dificultad
Idea sobre el número real	Asociada al adjetivo real Número como cantidad.
Identificación de representaciones de números reales	Como entes no numéricos Como procesos que no terminan.
Correspondencia de representaciones decimales de números reales y puntos en la recta	Como aproximaciones de números reales. Asociadas a adjetivos de los decimales, periódicos infinitos.
Procesos infinitos y limite	Lo indeterminado. Asociado a un conjunto con infinitos elementos. Asociado a la acción particular que produce el proceso.
Estructura de la recta geométrica	Recta como conjunto de puntos discretos. Recta como puntos ordenados por el siguiente.

En el momento de resolver el cuestionario, los estudiantes se encontraban tomando el curso de Fundamentos y un curso paralelo de Cálculo 1, en el cual se aborda también como primera instancia la enseñanza de los números reales como campo. El análisis que ha continuación se describe esta basado en las respuestas de 32 estudiantes al cuestionario.

a. *Idea sobre el número real*

Esta pregunta inicia el cuestionario, con ella se busca conocer la idea o noción que manejan los estudiantes sobre el número real, no necesariamente ligada a objetos matemáticos.

Casi la mitad de los estudiantes asocian el número real con la idea de número como cantidad pues esta *“construido por la abstracción de fenómenos físicos”.* Esta idea es coherente con la otra mitad de estudiantes para quienes el adjetivo real es indicación de objetos tangibles pues *“representan objetos de la vida diaria”.*

b. *Identificación de números reales*

Esta pregunta pretende establecer la coherencia de la idea de número real con los ejemplos asociados a representaciones propias del número como son las notaciones ‘√2, √3, л Las respuestas de los estudiantes se sintetizan en justificaciones como:

“no porque son números infinitos y no son periódicos”

explicitando el conflicto de aceptación de *propiedades periódico, no periódico* de los decimales, como si el término periódico evitara el infinito, ésta inicia el Camino para enfrentar numéricamente el problema de infinito potencial, puesto que sin son periódicos son representaciones de racionales.

c. *Correspondencia entre representaciones decimales de reales y puntos en la recta numérica*

Con la respuesta a la pregunta existen puntos en la recta que les correspondan números como 0.666..; л = 3.14159; 2,14987..., se busca ampliar el campo de conflicto que representan las propiedades de los decimales descritas además de establecer la correspondencia entre ellos y la recta numérica. Las respuestas son coherentes con las del ítem anterior puesto que la posibilidad de representación esta supeditada a los atributos descritos:

Los números periódicos no tienen punto en la recta
No se pueden ubicar porque son infinitos no periódicos
si se pueden situar con un compás lo más próximo posible,
pues es un número decimal periódico

ésta última respuesta identifica la contradicción entre aceptar que ciertos números si son reales, pero las representaciones decimales son sólo aproximaciones a ellos.

Las justificaciones también ponen de presente el problema entre el infinito potencial, denotado por los puntos suspensivos o por la propiedad periódica o no periódica de las expresiones decimales que denotan procesos y la actualización del infinito.

d *Procesos infinitos y límites*

Con las respuestas a la pregunta sí la suma de 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/8 +... es un número, de nuevo se explicitan las concepciones de infinito potencial que generan la flotación que expresa procesos infinitos. Entre las justificaciones formuladas por los estudiantes citamos las siguientes por considerarlas representativas de las respuestas de los estudiantes:

como la serie indica infinito y el infinito no se tiene, no habrá respuesta Asociada a la idea de infinito potencial determinada por la notación de los puntos suspensivos. Justificaciones como:

Esta suma es infinita porque a xxx se amplifica por 2 y al resultado otra vez por dos hasta el infinito colocan el acento del infinito potencial en el proceso de prolongación indefinida generada por la acción de amplificación y los puntos suspensivos. Respuestas como:

es igual a 1/α

muestran que la idea queda supeditada a elemento particular que produce la acción que genera el proceso infinito.

e. *Estructura de la recta*

La recta geométrica ha sido tomada como modelo ideal de continuidad en la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, para hacernos una idea de como los estudiantes conciben la estructura de la recta, segmentos o puntos y la forma como estos se relacionan entre sí, se preguntó a los estudiantes por su estructura, utilizando la herramienta del microscopio para ampliarla. En un primer momento, cuando no sé tenia el microscopio los estudiantes identificaron puntos, uno detrás de otro. Con la herramienta, dibujaron la recta y círculos tangentes entre sí. Cuando se les pregunto si entre los círculos tangentes existían puntos, todos coincidieron en afirmar que entre dos gordos tangentes, no existe ninguno. A lo que se suma la idea de puntos de gordos como átomos indivisibles. Para algunos estudiantes, la organización de los gordos, conserva el orden del siguiente en los números naturales.

Como se puede deducir de las justificaciones y respuesta que los estudiantes formulan, se concluye que manejan términos del lenguaje matemático, pero que el significado de los mismos no ha sido aprehendido, quizá porque la enseñanza ha enfatizado sobre el conocimiento de la gramática de las definiciones en detrimento de su comprensión.

Consideraciones finales

El análisis que hemos realizado proporciona argumentos razonables para identificar que el problema de las dificultades que presentan los estudiantes en la comprensión del número real, no obedece exclusivamente a condiciones ontógeneticas, es más de orden didáctico, de su relación con los obstáculos epistemológicos propios de la evolución conceptual y de su transposición como conocimiento matemático escolar. Por estas razones, la solución no puede ser entendida en el sentido de reorganizaciones de orden didáctico, de permutaciones de orden, primero números decimales, después..., *o* de su expulsión del sistema didáctico, creemos que la solución esta dada, entre otros aspectos, por la posibilidad de una reflexión profunda sobre cuestiones como el cuestionamiento a que la enseñanza de las definiciones no arrastra consigo la comprensión del concepto, al contrario es necesario considerar la construcción de vías de acceso para incluir las nociones y procedimientos que condujeron a su formulación como objeto matemática ideal; que un concepto solo adquiere significado en el marco de sistemas de conceptos.

De otro parte, tal como lo demuestran las diversas investigaciones citadas sobre procedimientos, nociones y conceptos que confluyen para la comprensión de los reales, las intuiciones en los estudiantes se forman debidas más en buena parte a la experiencia y persisten a pesar de las presentaciones formales de la definición. La enseñanza aún de objetos matemáticos complejos, no comienza en un terreno virgen, los estudiantes tienen ya un cierto número de ideas, de intuiciones y a pesar de que participen en la formulación de definiciones en la clase no desaparecen, son resistentes al cambio. Por tales razones es necesario abocar la Construcción de matemáticas escolares que además de sustentarse sobre el desarrollo histórico de los conceptos, delimite ventajosamente, como expresa Chevellard, en el sentido de resumen mejorado, toda la riqueza de desarrollos fecundos y a veces olvidados de la construcción histórica (1983) y se integre en el marco de las condiciones en que se lleva a cabo el proyecto social y cognitivo de la enseñanza de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

ARBOLEDA L. O., RECALDE L. C. (1995). Formación y manejo operatorio de conceptos matemáticos: la historia y epistemología del infinito. En Matemáticas. Enseñanza Universitaria. Volumen IV N^0 1 y 2.

CHEVELLARD, G., (1983) Le transposición didactique. Le pensee sauvage.

EL BOUAZZAQUI, [1. (1996). Conceptions des éléves et des professeurs á propos de la notion de continuité d'une fonction PHD. Université de Bordeaux 1.

KLINE, M. (1987). Calculus: an Intuitive and Physical Aprroach, John Wiley.

MORENO, L. E., WALDEGG, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. En Educational Studies in Mathematics 1.

RICO, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamericana. U. De los Andes. U de Granada.

RICO, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de la Matemáticas. En Epsilon de la S.A.E.M. Thales. N° 38.

RIGO, M. (1994). Elementos históricos y psicogenéticos en la construcción del continuo matemático. Primera y Segunda parte. En Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamericano.

ROMERO A., I. (1997). La introducción del número real en la enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción. Colección Mathema.

ROMERO, C. (1996). Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario. En Enseñanza de las Ciencias. N° 14.

SFARD, A. (1992). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics. N° 22.

TUREGANO, P. (1996). Intuición del infinito en estudiantes de Primero de B. U. P. En Revista Epsilon de la S.A.E.M. Thales. N° 34.

MARCO GENERAL. MATEMÁTICAS. PROPUESTA CURRICULAR Octavo Grado (1990). Ministerio de Educación Nacional. Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente. Currículo y Medios Educativos.

MARCO GENERAL. MATEMÁTICAS. PROPUESTA CURRICULAR; Noveno Grado (1990). Ministerio de Educación Nacional. Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente. Currículo y Medios Educativos.