H - CONJUNTOS

***Jorge Páez* O.** [*]
Carlos Luque A. *
Albedo Donado N. *

Abstract

Using predicates with values in a Heyting Algebra H, a generalized notion of set, denoted H-set, is constructed. The algebraic structure of this sets and the notions of product and relations between them is studied.

INTRODUCCIÓN

Así como la lógica asociada al álgebra de Heyting 2, permite construir la teoría de conjuntos clásica, cualquier otra álgebra de Heyting H permite construir por analogía teorías que llamaremos de H-conjuntos [8], los cuales están definidos por predicados cuyos valores de verdad son los elementos del conjunto H y donde las proposiciones que ellos generan pueden conectarse mediante las operaciones (٨ ,,٧→), propias del álgebra considerada. En estas teorías es posible desarrollar conceptos que generalizan nociones entre conjuntos como las de producto, relaciones y funciones, etc.

A pesar de que el conjunto de valores de verdad de H permite incluir casos como el del intervalo real [0,1] y que las operaciones (٨) e (٧) a definir coinciden con las de la lógica difusa [3], esta teoría difiere de aquella por no considerar definido un complemento y por considerar el operador (→) como el adjunto a derecha del operador (٨).

1. ALGEBRAS DE HEYTING

En esta sección se presenta la noción de álgebra de Heyting, se observa la forma como de la misma manera en que el álgebra de Boole $\underline{2}$ aporta su estructura a ص (x), la estructura de un álgebra de Heyting H se extiende al conjunto de funciones con rango en H y dominio en un conjunto X y al conjunto de H-conjuntos con ellas asociado.

1.1 Definición

Un **retículo H** es un conjunto ordenado en el cual para cada dos elementos a, *b* Є H existe el extremo superior (notado a ٧ *b)* y extremo inferior (a ٨ *b). [9].*

Un retículo H **tiene exponenciales** si para cada dos elementos a, *b* Є H existe un elemento y Є H tal que x ≤ y si y solo si x ٨ a ≤ *b.* La exponencial de a y *b,* también conocida como la implicación entre a y *b,* es notada a → *b.*

---

[*] Profesores Universidad Pedagógica Nacional.

Un retículo H tiene **elemento** mínimo, si existe 0 Є H tal que para cada a Є H se tiene que $0 \leq a$.

Un retículo H tiene **elemento máximo,** si existe 1 Є H tal que para cada a Є H se tiene que $a \leq 1$.

Un **álgebra de Heyting** H es un retículo con exponenciales que posee elemento mínimo.

En un álgebra de Heyting H, el **pseudocomplemento** de un elemento a Є H, notado ~a, se define como $a \rightarrow 0$

1.2 El álgebra de Heyting H^X

Sea H un álgebra de Heyting, el conjunto $\mathbf{H^X}$ de funciones de X en H es también un álgebra de Heyting definiendo:

i) ג ≤ *μ* *si y solo si* (∀x) (ג(x) ≤*μ* (x))
ii) (ג ∧ *μ*) (x) = ג (x) ∧ *μ* (x)
iii) (ג ∨ *μ*) (x) = ג (x) ∨ *μ* (x)
iv) (ג → *μ*) (x) = ג (x) → *μ* (x)

Los elementos mínimo y máximo del retículo son respectivamente las funciones 0(x) = 0, y, 1 (x) = 1. El pseudocomplemento está definido por la función (- ג) (x) = ~ ג (x) y la igualdad por ג = *μ* si y sólo si (∀x) (ג (x) = *μ* (x)).

El orden definido en H^X corresponde al orden producto en H^X, es decir, componente a componente. Si H = {0 , 1}, H^X es isomorfo a ص (X).

El conjunto H^X puede interpretarse como un conjunto de predicados polivalentes [7] (tantos valores como elementos tenga H) definidos sobre un conjunto X.

1.3 El álgebra de Heyting de los H - Conjuntos

Dados dos conjuntos X e Y, toda función ג: X → Y define una función

ג! ص (Y) → ص (X)
B → ג! (B) {X Є X : ג (x) Є B}

Como las partes unitarias de Y son isomorfas con Y, si consideramos una función ג Є Y^X , la restricción de ג! a las partes unitarias de Y nos define una función

(ג)• : Y → ص (X)

h → (ג)• (*h*) = ג! *({h}).*

Si llamamos A_h = (ג)• *(h)* para cada *h* Є Y, entonces

X = U A_h, y $A_h \cap A_k = \varnothing$ si $h \neq k$

es decir, la colección { A_h : Є Y } es casi una partición del conjunto X, salvo que en este caso, los A_h no necesariamente son diferentes de vacío.

El conjunto

$\Lambda^{\bullet}{}_{x}$ = { $\lambda^{\bullet}$:H → ص (X), λ Є H^X }

Es también un álgebra de Heyting, donde:

i. $\lambda^{\bullet} \leq \mu^{\bullet}$ si y solamente si $\lambda \leq \mu$
ii $\lambda^{\bullet} \wedge \mu^{\bullet} = (\lambda \wedge \mu)^{\bullet}$
iii. $\lambda^{\bullet} \wedge \mu^{\bullet} = (\lambda \vee \mu)^{\bullet}$
iv. $\lambda^{\bullet} \rightarrow \mu^{\bullet} = (\lambda \rightarrow \mu)^{\bullet}$

Los elementos mínimo y máximo del retículo son respectivamente 0● y 1●, el pseudocomplemento de $\lambda^{\bullet}$ es $-\lambda^{\bullet} = (-\lambda^{\bullet})$ y la igualdad por $\lambda^{\bullet} = \mu^{\bullet}$ si y solamente Si $\lambda = \mu$

Los elementos de $\Lambda^{\bullet}$ los llamaremos H **— Conjuntos sobre X.**
De esta manera, a cada predicado H-valente λ Є H^X, se le asigna un H-conjunto sobre X.

En particular si

H = n = { 0, 1/(n -1), $2/(n$ -1), $3/(n$ -1),…, (n - 1) /(n -1) = 1 }

con el orden inducido por el orden usual de los números racionales del intervalo [0, 1], H es un álgebra de Heyting, las operaciones $\wedge$, $\vee$ son las usuales dadas por el *inf* y el *sup* respectivamente, la implicación entre p y q esta dada por la fórmula [4]

$$p \rightarrow q = \begin{cases} 1 \text{ si } p \leq q \\ q \text{ si } q > p \end{cases}$$

Cada función λ: X n, determina un n -conjunto $\lambda^{\bullet}$ que puede identificarse con la n-upla (A_1, $A_{(n-2)/(n-1)}$, …, A_0), donde A = { x: λ (x) = $i/(n-1)$ }.
¡ *1 e'*— 1>

En esta colección $\Lambda^{\bullet}$ de n-conjuntos, [6] dados $A^{\bullet}$ = (A_1,..., A_0) y $B^{\bullet}$ (B_1,..., B_0), las operaciones básicas entre ellos en términos de sus componentes están dadas en la tabla 1, donde $(\ )_h$ representa la componente h del H-conjunto asociado a la operación correspondiente.

2. H - Definiciones

Una definición en lógica bivalente es una expresión de la forma A ↔ B donde A es un término nuevo de una teoría y B es una expresión con sentido completo en el lenguaje de la teoría (una fórmula bien formada). Estas fórmulas son proposiciones, decir tienen valores de verdad verdadero o falso. Generalmente no es necesario explicitar mas que uno de estos valores (lo que es el término definido) puesto que al hacerlo el otro queda plenamente identificado debido a que sólo hay dos valores posibles y el uno es el complemento del otro.

$\underline{n}$	$\underline{n}^{x}$	$\Lambda^{\bullet}{}_{X}$
$\wedge$	$A^{\bullet} \wedge B^{\bullet}$	$(\ )_h = \left(\bigcup_{h \leq k}(A_h \bigcap B_k)\right) \bigcup \left(\bigcup_{h \leq k}(B_h \bigcap A_k)\right)$
$\vee$	$A^{\bullet} \vee B^{\bullet}$	$(\ )_h = \left(\bigcup_{k \leq h}(A_h \bigcap B_k)\right) \bigcup \left(\bigcup_{k \leq h}(B_h \bigcap A_k)\right)$
$\rightarrow$	$A^{\bullet} \rightarrow B^{\bullet}$	$(\ )_h = \bigcup_{k \leq h}(A_k \bigcap \bigcup_{j \leq k} B_j)$ si $h \neq 0$ $(\ )_0 = \bigcup_{0<k}(B_0 \bigcap A_k)$
$\leftrightarrow$	$A^{\bullet} \leftrightarrow B^{\bullet}$	$(\ )_1 = \bigcup_{k=0}^{1}(A_k \bigcap B_k)$ $(\ )_h = \left(\bigcup_{k>h}(A_h \bigcap B_k)\right) \bigcup \left(\bigcup_{k>h}(B_h \bigcap A_k)\right)$ si $h \neq 1$
$\neg$	$\neg A^{\bullet}$	$(\ )_1 = A_0$ $(\ )_h = \varnothing$ si $h \neq 1, 0$ $(\ )_0 = \bigcup_{k \neq 0} A_k$

En el caso de que un álgebra de Heyting H tenga más de dos valores, una proposición tiene tantos valores de verdad posibles como elementos tenga H y por lo tanto cada definición en este contexto es multivalente y da lugar a tantas definiciones bivalentes como elementos existan en H. Ya no solo es necesario decir que es un objeto, sino se hace necesario decir que “1/2 es”, etc. Precisamos esto en lo que sigue.

2.1 Definición polivalente

Si partimos de predicados sobre un conjunto X, ellos nos dan lugar a proposiciones mediante el uso de cuantificadores propios del álgebra H, definidos por:

$$(\forall x)(p(x)) = \inf_{x \in X} \{p(x)\}$$

$$(\exists x)(p(x)) = \sup_{x \in X} \{p(x)\}$$

Por ejemplo, si consideramos H = ***n***, la definición de igualdad entre predicados sobre un conjunto **X,** da origen a *n* definiciones bivalentes así:

$p =_k q$ si y solamente si

$(\forall x)\ (p(x) \leftrightarrow q(x)) = k$

las cuales, de acuerdo con las definiciones dadas para el cuantificador universal, son equivalentes a:

$p =_k q$ si y solamente si

$$\inf_{x \in X} \{ p(x) \leftrightarrow q(x) \} = k$$

y si

$A_h, = \{ x: p(x) = h\}$ y $B_h, \{x: q(x) = h\}$

son los subconjuntos asociados con cada uno de los predicados *p* y q respectivamente, esto es, cada una de las componentes de las n-uplas que identifican a los H-conjuntos, entonces la definición de k-igualdad corresponde al par de condiciones:

a) $\exists\ x_0 \in X$ tales que

$$p(x_0) \leftrightarrow q(x_0) = k$$

b) $X \subseteq \bigcup_{J \geq K} (\bigcap_{J \geq K} (A_1 \cap B_1)) \cup (\bigcup_{J \geq K} (A_1 \cap B_1) = ((\bigcup_{J \geq K} A_1) \cap (\bigcup_{J \geq K} B_1)) \cup (\bigcup_{J \geq K} (A_1 \cap B_1))$

En general, llamaremos **H-Definición a** una proposición de la forma $p \leftrightarrow q$ donde *p* es un término nuevo en la teoria y q es una proposición construida con los términos del lenguaje permitidos por la lógica de H.

Presentamos dos ejemplos básicos de ellas: la H-igualdad y la H-contenencia entre H-conjuntos.

2.2 H - Igualdad entre H - conjuntos

Dos H **-** conjuntos $\lambda^\bullet$ y $\mu^\bullet$**,** son **H-iguales** si y sólo si $(\forall x)\ ((\lambda(x) \leftrightarrow \mu(x))_1$, notado $\lambda^\bullet \equiv \mu^\bullet$ diremos que son ***k*- iguales,** notado $\lambda^\bullet =_k \mu^\bullet$, si y solo si

$$(\forall x)\ ((\lambda(x) \leftrightarrow \mu(x)) = k$$

Esto significa que:

$\lambda^\bullet =_k \mu^\bullet$, si y solamente si

$$\inf_{x \in X} \{ \lambda(x) \leftrightarrow \mu(x) \}$$

lo cual en el caso H = <u>*n*</u>, es equivalente a que:

i) $\exists\ x_0 \in X$ tales que

$$\lambda(x_0) \leftrightarrow \mu(x_0) = k$$

ii) $\forall x \in X_1\ (\lambda(x) \leftrightarrow \mu(x) = k$

Si escribimos $A^\bullet = \lambda^\bullet$ y $B^\bullet = \mu^\bullet$ como n-uplas, las anteriores condiciones toman la forma:

i) $(A \leftrightarrow B)_k = (\bigcup_{i>k} (A_k \cap B_i) \cup (\bigcup_{i>k} (B_k \cap A_i) \neq \emptyset$

ii) $X \subseteq \bigcup_{i>k} (A \leftrightarrow B)_j = (\bigcup_{i>j} (A_j \cap B_i) \cup (\bigcup_{i>j} (B_j \cap A_i))$

2.3 H - Contenencia entre H - conjuntos

Dados dos H-conjuntos $A^\bullet = \lambda^\bullet$ y $B^\bullet = \mu^\bullet$ diremos que $A^\bullet$ esta **H-contenido** en $B^\bullet{}_1$ **notado** $A^\bullet < B^\bullet$**, si y solo si** $(\forall x)\ ((\lambda(x) \leftrightarrow \mu(x))_1$, y que $A^\bullet$ está ***k*- contenido** en $B^\bullet{}_1$ **notado** $A^\bullet \leq_k B^\bullet$ si y solo si

$$(\forall x)\ ((\lambda(x) \leftrightarrow \mu(x)) = k$$

Es decir,

$A^\bullet \leq_k B^\bullet$ si y solamente si

$$\inf_{x \in X} \{\lambda(x) \leftrightarrow \mu(x)\} = k$$

lo cual en el caso H = $\underline{n}$ es equivalente a:

i) $\exists\ x_0 \in X$ tales que

$\lambda(x_0) \leftrightarrow \mu(x_0) = k$

ii) $\forall x \in X,\ (\lambda(x) \leftrightarrow \mu(x) \geq k$

Si escribimos $A^\bullet = \lambda^\bullet$ y $B^\bullet = \mu^\bullet$ como n-uplas, el anterior par de condiciones adopta la forma:

$(A^\bullet \rightarrow B^\bullet)_k = B_K \cap (\bigcup_{j>k} A_j) \neq \emptyset$

si $k \neq 1$

o $(A^\bullet \rightarrow B^\bullet)_l = \bigcup_{i \in H} A_j \cap (\bigcup_{j \geq i} B_j) \neq \emptyset$

II) $x \subseteq \bigcup_{h \geq k} (A^\bullet \rightarrow B^\bullet)_h$

Nota: La relación de orden *(≤)* entre H-conjuntos definida en la sección 1.3 corresponde a la 1-contenencia. Esto es, si $A^\bullet = \lambda^\bullet$ y $B^\bullet = \mu^\bullet$

$$\lambda^\bullet \leq \mu^\bullet \text{ si y solamente si y } A^\bullet \leq_1 B^\bullet$$

2.4 H - Conjuntos Unitarios

Dados a Є X y *h* Є H, al H-conjunto $A^\bullet = (U^h{}_a)^\bullet$ definido por la función

$$(U^h{}_a)(x) = \begin{cases} h & si \quad x = a \\ o & si \quad x \neq a \end{cases}$$

lo llamamos un H - **Conjunto unitario asociado al punto a.**

En el libro Fuzzy Topology [1 0] se presenta una noción de H-punto borroso definido por Goguen[3] con esta misma función, sin embargo en esta teoría los conjuntos borrosos se corresponden con funciones de H^X y no con los elementos de $\Lambda^\bullet{}_{x1}$,adicionalmente no se considera la multivalencia de las definiciones propias del retículo considerado.

Nota: El H-conjunto unitario $(U^h{}_a)$ es el menor H-conjunto para el que ʎ(a) = h esto es, de acuerdo al orden generado por la 1-contenencia entre H-conjuntos, puesto que

$$(U^h{}_a)^\bullet = \bigwedge_{\lambda\bullet \in \Lambda\bullet} \{ \lambda\bullet : \lambda\,(a) = h\}$$

Puesto que

$$(U^h{}_a)^\bullet = \in \{ \lambda\bullet : \lambda\,(a) = h\}$$

Y si

$$B^\bullet = \mu^\bullet \in \quad \{ \lambda\bullet : \lambda\,(a) = h\}$$

como $A_k = \varnothing$ para todo $k \neq 0$**,** *h,* entonces

$$A_k \ \underline{c} \ \bigcup_{i \geq k} B_i$$

es decir $A^\bullet \leq_1 B^\bullet$

Todo H - conjunto $A^\bullet$, puede escribirse como unión *(sup)* de H **-** conjuntos unitarios.
Si $A^\bullet = \lambda^\bullet$ se tiene:

$$A^\bullet = \bigvee \ (U^{\lambda(x)}{}_x)^\bullet$$

Para el caso H = $\underline{n}$, dado x Є X y $h \in \underline{n}$

$$(U^h{}_x)^\bullet = (\varnothing, \ldots, \{x\}, \ldots, \{x\}^c)$$

donde {x} está en la *h*-ésima componente.

3. PRODUCTOS Y RELACIONES ENTRE H-CONJUNTOS

La presente sección tiene como propósito extender las nociones de producto cartesiano de conjuntos y relaciones entre ellos a productos y relaciones entre H-conjuntos, a las que llamaremos H-productos y H-relaciones.

3.1 H-Productos entre H-conjuntos

El producto cartesiano A x B de dos conjuntos A y B [5] es el conjunto de parejas ordenadas *(a, b)* con primera componente en el conjunto A y segunda componente en el conjunto B.

Esta definición está construida sobre dos conceptos: el de pareja ordenada y el conectivo $\wedge$. La generalización que haremos en éste trabajo deja igual la noción de par ordenado de puntos y utiliza los conectivos propios del álgebra H para extender la noción de producto.

Esto es: Si H es un álgebra de Heyting y X e Y son conjuntos, $\lambda \in H^X$, $\mu \in H^X$ y los H-conjuntos asociados a λ y μ respectivamente, definimos el **H- producto entre $\lambda^\bullet$ y $\mu^\bullet$ según el conectivo lógico** © como el H-conjunto sobre X x Y

$$\lambda^\bullet \times_{©} \mu^\bullet = (\lambda \times_{©} \mu)^\bullet$$

donde

$$\lambda \times_{©} \mu : X \times Y \to H$$

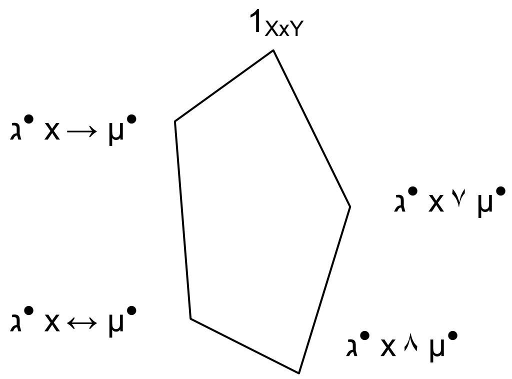
$$(x, y) \to \lambda(x) © \mu(y)$$

y © corresponde a cualquier conectivo lógico de los definidos sobre H.

Así por ejemplo, la primera componente del producto construido con el conectivo A corresponde al producto cartesiano usual entre los conjuntos A y B y la primera componente del producto construido con el conectivo → corresponde al producto fibrado (Pullback)[1] entre las funciones características λ y μ de A y B respectivamente.

Notas:

1. Vistos como H-conjuntos sobre X x Y, los H-productos definidos por los los conectivos lógicos están ordenados según el siguiente diagrama



Este diagrama no es un subretículo [2] del álgebra de Heyting formada por todos los H-conjuntos en X x Y, por ejemplo, el *inf* entre los H-productos $\lambda^\bullet \times_\rightarrow \mu^\bullet$ y $\lambda^\bullet \times_\vee \mu^\bullet$ no aparece en él, lo que queremos resaltar es que. el producto usual, correspondiente al conectivo Λ, es el menor de todos los productos considerados.

2. Un caso particular, se obtiene cuando $\lambda^\bullet = 1_X$ y $\mu^\bullet = 1_Y$, pues en él todos los productos coinciden y se tiene que.

$$1_X \;\; x_{©} \;\; 1_Y = 1_{XxY}$$

3.2 H-relaciones entre H-conjuntos

Dados $\lambda^\bullet$ y $\mu^\bullet$ H-conjuntos sobre los conjuntos X e Y respectivamente y un H-producto $\lambda^\bullet \; x_{©} \; \mu^\bullet$ t. según el conectivo lógico © entre ellos, llamaremos una H-relación según © a cualquier H-conjunto $p^\bullet$ que esté H-contenido en**,** $\lambda^\bullet \; x_{©} \; \mu^\bullet$ es decir, si

$$p^\bullet \; < \; \lambda^\bullet \; x_{©} \; \mu^\bullet$$

Esta es una frase multivalente que da origen a tantas definiciones bivalentes de relación, como elementos tenga H. Así diremos que $p^\bullet$ es una **h-H-relación según el conectivo © de** $\lambda^\bullet$ en $\mu^\bullet$, notado, $p^\bullet \leq_h \lambda^\bullet \; x_{©} \; \mu^\bullet$ si la frase $p^\bullet < \lambda^\bullet \; x_{©} \; \mu^\bullet$ tiene valor de verdad igual a *h.*

Centraremos nuestro interés en:

1. Las H-relaciones definidas con respecto al producto asociado al conectivo lógico Λ ya que este es el menor de los productos definidos, lo que implica que si $p^\bullet$ es una H-relación entre $\lambda^\bullet$ y $\mu^\bullet$ se tiene que $p^\bullet$ es una H-relación según © entre $\lambda^\bullet$ y $\mu^\bullet$. En adelante omitiremos el símbolo © cuando nos refiramos al producto definido con el conectivo Λ.

2. Las 1-H-relaciones

Notas:

i). Toda 1-H-relación $p^\bullet$ *de* $\lambda^\bullet$ en $\mu^\bullet$ de X en .t es una 1-H-relación entre los H-conjuntos $1^\bullet_x$ y $1^\bullet_y$.

ii) $p^\bullet$ es una 1-H-relación entre los H-conjunto $1^\bullet_x$ y $1^\bullet_y$. si y solamente si $p^\bullet \leq_1 1^\bullet_{XxY}$.

3.3 Funciones asociadas a las H-relaciones

Toda relación entre dos conjuntos X e Y define un par de funciones entre sus conjuntos de partes, conocidas como las funciones imagen directa e imagen recíproca.

Así mismo, toda H-relación entre H-conjuntos define un par de funciones entre los conjuntos de H-conjuntos $\Lambda^\bullet_x$ y $\Lambda^\bullet_y$ definidos sobre X e Y, respectivamente.

Para su construcción requerimos del manejo de algunas funciones que precisamos enseguida:

Dada una H-relación $p^{\bullet}$ *de* $ʎ^{\bullet}$ en $\mu^{\bullet}$**,** existen funciones asociadas a ella:

1. La función ρ: X x Y → H que define a $p^{\bullet}$ como H-conjunto.

2. Para cada x Є X y para cada *y* Є Y, las inclusiones:

i_y: X → XxY $\qquad$ i_x: X → XxY

x → $i_y(x) = (x,y)$ $\qquad$ y→ $i_x(x) = (x,y)$

Con ellas podemos formar, para cada x e X y para cada *y* e Y, nuevos H-conjuntos sobre X y sobre Y, utilizando las funciones compuestas:

$$P_x : Y \to H$$
$$Y \to p\,(i_x\,(y)) = p\,(x,y)$$

$$P_y : X \to H$$
$$x \to p\,(i_y\,(y)) = p\,(x,y)$$

Estos H-conjuntos, a su vez, nos permiten definir la función

$$R^1 : \Lambda^{\bullet}{}_{x1} \to \Lambda^{\bullet}$$
$$\mu^{\bullet} \to \bigvee_{y \in Y} ((\rho_y \wedge \mu_y)^{\bullet})$$

donde μ_y es la función constante

$$\mu_y : X \to H$$

$$x \to \mu_y\,(x) = \mu(y)$$

A la función R^1 la llamaremos la **función imagen recíproca por** la H-relación ρ●

En forma análoga, definimos la función

$$R_1 : \begin{array}{l} \Lambda^{\bullet}{}_x \quad \Lambda^{\bullet}{}_y \\ ʎ^{\bullet} \to \bigvee_{x \in X} ((\rho \wedge ʎ_x)^{\bullet}) \end{array}$$

donde $ʎ_y$ es la función constante

$$ʎ_x \;\; Y \to H$$

$$y \to ʎ_x\,(y)\;ʎ\,(x)$$

A la función R la llamaremos la **función imagen directa** por la H-relación $\rho^{\bullet}$

Afirmamos que tanto R^1 como R_l son morfismos de conjuntos ordenados puesto que si $ʎ, \theta \in H^X$ definen los H-conjuntos $ʎ^{\bullet}$, $\theta^{\bullet}$ y $ʎ(x) \leq \theta(x)$ para todo x entonces para todo y Є **Y,** $ʎ_x\ (y) \leq \theta_x(y)$ y por tanto $\rho_x \wedge ʎ_x \leq \rho_x \wedge \theta_x$ luego $R_1(ʎ) \leq R_1(\theta)$ y Similarmente, si $\mu \leq \varphi$ entonces $R_l(\mu) \leq R_l(\theta)$.

3.4 Dominios y Rangos de H-relaciones

Las funciones imagen directa e imagen recíproca asociadas a una H-relación $\rho^{\bullet}$, nos permiten caracterizar su dominio y su rango así:

i). El **dominio** $\rho^{\bullet}$, notado $d^{\bullet}_{\rho^{\bullet},}$, es el H-conjunto

$$d^{\bullet}_{\rho^{\bullet},} = R^l\,(1^{\bullet}{}_y) = \bigvee_{y \in Y} ((p_y \wedge 1_y)^{\bullet}) = \bigvee_{y \in Y}((\rho_y)^{\bullet})$$

donde $1_y\,(x) = 1$ para todo x en X.

ii) El **rango** de $\rho^{\bullet}$, notado $r^{\bullet}_{\rho^{\bullet},}$, es el H-conjunto

$$\bigvee_{x \in X} = R^l\,(1^{\bullet}{}_x) = \bigvee_{x \in X} ((p_x \wedge 1_x)^{\bullet}) = \bigvee_{x \in X}((\rho_x)^{\bullet})$$

donde $1_x\,(y) = 1$ para todo y en Y.

Un resultado análogo al que se tiene para las relaciones usuales entre conjuntos lo tenemos para las funciones imagen directa e imagen recíproca entre H-conjuntos, a saber:

1. Si $ʎ^{\bullet} < d^{\bullet}_{\rho^{\bullet}}$, entonces $ʎ^{\bullet} < R^l\,(R_l\,(ʎ^{\bullet}))$
2. Si $\mu^{\bullet} < r^{\bullet}_{\rho^{\bullet}}$ entonces $\mu^{\bullet} < R_l\,(R^l\,(\mu^{\bullet}))$

La demostración de esta afirmación, se sigue parafraseando la demostración para relaciones usuales, teniendo cuidado en cambiar los cuantificadores existencial y universal por *sup* e *inf* respectivamente, veamos:

Sea p una $\rho^{\bullet}$ relación de $ʎ^{\bullet}$, un H-conjunto sobre un conjunto X, en $\mu^{\bullet}$, un H-conjunto sobre un conjunto Y,

Si $ʎ^{\bullet} < d^{\bullet}_{\rho^{\bullet}}$, entonces

$$ʎ^{\bullet} < \bigvee_{y \in Y}((\rho_y \wedge 1_y)^{\bullet}) \equiv \bigvee_{y \in Y}((\rho_y)^{\bullet})$$

Es decir

$$\gimel\ (x) \ \leq \bigvee_{y \in Y}((\rho_y \ \wedge \ 1_y)^{\bullet}) \ \ (x)) \ = \bigvee_{y \in Y}((\rho_y)(x))$$

$$(*) \quad \gimel\ (x) \ \leq \bigvee_{y \in Y} (\rho\ (x, y)) \quad \text{para todo x en X}$$

Operando a ambos lados de la desigualdad con (x) obtenemos:

$$\gimel\ (x) \ \leq \bigvee_{y \in Y} (\rho\ (x, y) \ \wedge \ \gimel\ (x)\ )$$

para todo x en X y por lo tanto:

$$(**) \quad \gimel\ (x) \ \leq \bigvee_{x \in X} \ \bigvee_{y \in Y} \ (\rho\ (x, y) \ \wedge \ \gimel\ (x)\ )$$

De (*) y (**) se tiene que

$$\gimel\ (x) \ \leq \ (\bigvee_{y \in Y} \ (\rho\ (x, y)\ )) \quad \wedge \quad (\bigvee_{x \in X} \ \bigvee_{y \in Y} \ (\rho\ (x, y) \ \wedge \ \gimel\ (x)\ ))$$

para todo x en X.

Utilizando la propiedad distributiva obtenemos que

$$\gimel\ (x) \ \leq \bigvee_{y \in Y} (\rho\ (x, y) \ \wedge \ (\ \bigvee_{x \in X} \ (\rho\ (x, y) \ \wedge \ \gimel\ (x)\ ))$$

para todo x en X. O equivalentemente

$$\gimel^{\bullet}\ (x) \ \leq \bigvee_{y \in Y} (\rho_y \ \wedge \ (\bigvee_{x \in X} (\rho_x \ \wedge \ \gimel_{\,x}))_{\,x})\ (x)$$

para todo x en X. O sea

$$\gimel^{\bullet} < \ \bigvee_{y \in Y} (\rho_y \ \wedge \ (\bigvee_{x \in X} (\rho_x \ \wedge \ \gimel_{\,x}))_{\,y})^{\bullet}$$

$$\gimel^{\bullet} < \ R^{l}\ ((\bigvee (\rho_x \ \wedge \ \gimel_{\,x}))_{\,y})^{\bullet}$$

entonces

$$\gimel^{\bullet} < \ R^{l}\ (R_{l}\ (\gimel^{\bullet}\ )\ )$$

como queríamos demostrar.

Análogamente se demuestra que

Si $\mu^\bullet < r^\bullet$ entonces $\mu^\bullet < R_l(R^l(\mu^\bullet))$

3.5 Los H-conjuntos como categoría

Además de las operaciones de intersección, unión, implicación, equivalencia y seudocomplementación definidas entre H-relaciones entre dos H-conjuntos $\lambda^\bullet \in \Lambda^\bullet_x$ y $\mu^\bullet \in \Lambda^\bullet$ y, a las que se tiene derecho por ser H-conjunto del producto X x Y podemos definir la operación **composición** entre H-relaciones así:

Dadas $\rho^\bullet < \lambda^\bullet$ x $\mu^\bullet$ y $\sigma^\bullet < \mu^\bullet$ x $v^\bullet$ dos H-relaciones, la **composición** de $\rho^\bullet$ y $\sigma^\bullet$ notada $\sigma^\bullet$ y $\rho^\bullet$ es la H-relación definida por:

$$(\sigma^\bullet \circ \rho^\bullet) = (\sigma \circ \rho^\bullet)$$

donde

$$(\sigma \circ \rho) = (x, z) = V \ (\rho(x,y) \wedge \sigma(y,z))$$

En las relaciones usuales, el manejo de las funciones imagen directa e imagen recíproca asociadas con cada relación, facilitan el cálculo de la compuesta, por cuanto dadas las relaciones $R \subseteq X \times Y$ y $S \subseteq Y \times Z$,

$$S \circ R = \{ (x, z)\ z \in S_!, (R_! (\{ x \})) \}$$

También en las H-relaciones puede calcularse fibra por fibra la compuesta de los relaciones, determinando para cada x el H-conjunto

$$(S_! (R_!))\ ((U^h{}_x)^\bullet)$$

donde $(U^h{}_x)^\bullet$ es el H conjunto unitario asociado con cada elemento x del dominio de la relación R.

Esto es, para todo $x \in X$ y para todo $z \in Z$

$$(S \circ R)\ (x, z) = (S_!, (R_!))\ (U^h{}_x)^\bullet$$

donde $h = (R(x,y))$

En efecto,

$$(S_!, (R_!))\ (U^h{}_x)^\bullet \equiv S_!, ((\bigvee_{a \in X} (\rho_a \wedge (U^h{}_x)_a)^\bullet) \equiv (\bigvee_{y \in Y} \sigma \wedge (\bigvee_{a \in X} (\rho_a \wedge (U^h{}_x)_a))_y)^\bullet$$

y para cada $z \in Z$, tenemos:

$$\bigvee_{y \in Y} \sigma_y \wedge (\bigvee_{a \in X} (\rho_x \wedge (U^h{}_x)_a))_y)\,(z) = \bigvee_{y \in Y} (\sigma (y,z) \wedge (\bigvee_{a \in X} (\rho_a \wedge (U^h{}_x)_a))_y\,(z))$$

como

$$(\bigvee_{a \in X} (\rho_x \wedge (U^h{}_x)_a))_y) (z) = \bigvee_{a \in X} (p (a,y) \wedge (U^h{}_x)_a (y)) = \bigvee_{a \in X} (p (a,y) \wedge (a)) = p (x,y)$$

para todo *y* en Y

entonces

$$\bigvee_{y \in Y} \sigma_y \wedge (\bigvee_{a \in X} (\rho_x \wedge (U^h{}_x)_a))_y) (z) = \bigvee_{y \in Y} (\sigma (y,z) \wedge p (x,y)$$

La composición de H-relaciones permite reconocer una estructura categórica [1] sobre los H-conjuntos considerados como objetos y las H-relaciones como morfismos, debido a que se satisface.

1. Asociatividad. Sean $R^\bullet$ es una H-relación de $\lambda^\bullet$ en $\mu^\bullet$, $\sigma^\bullet$ una H-relación de $\mu^\bullet$ en $\rho^\bullet$ y $T^\bullet$ una relación de $\rho^\bullet$ en θ entonces

$$(T^\bullet \circ \sigma^\bullet) \circ \rho^\bullet \equiv T^\bullet \circ (\sigma^\bullet \circ \rho^\bullet)$$

2. Para cada H-conjunto $\lambda^\bullet$ la H-relación $1^\bullet{}_{\lambda\bullet} : \lambda^\bullet \rightarrow \lambda^\bullet$

definida por la función

$$1_{\lambda\bullet} (x, y) = \begin{cases} \lambda (x) & \text{si } x=y \\ 0 & \text{si } x=y \end{cases}$$

actúa como elemento idéntico para la composición.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Adamek J.; *Theory of Mathematical Structures,* Reidel Publishing C., 1983.

[2] Dubreil P., Dubreil-Jacotin M.; *Lecciones de Algebra Moderna,* Reverte 1965.

[3] Goguen, J.A.; *L-Fuzzy Sets,* J. Math Anal. Appl; 18. (1967). 145-174.

[4] Goldblatt, R. *Topoi, The categorical analysis of Logic.* North Holland, 1984

[5] kinsolving M; Set *Theory and the Number Systems,* International Textbook Co., 1967.

[6] Luque C., Donado A., Páez J.; *Caracterización de conjuntos por ternas,* XIII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, 1996.

[7] Luque C., Donado A., Páez J. *Nociones conjuntistas sobre álgebras de Heyting,* VIII Encuentro de Geometría y sus aplicaciones. 1997.

[8] Luque C., Donado A., Páez J.; *H-conjuntos: Una generalización de la noción de Conjunto,* XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, 1997.

[9] Oostra A.; *Álgebras de Heyting,* XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, 1997.

[10] Ying-Ming L., Mao-Kang L., *Fuzzy Topology,* World Scientific, 1997.