Una estrategia de enseñanza de la demostración utilizando *software* de geometría dinámica

A Teaching Approach to Proof Using Dynamic Geometry *Software*

Uma estratégia de ensino de demonstração usando *software* de geometria dinâmico

Martín Eduardo Acosta Gempeler*
Santiago Cardozo Fajardo**

* Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Correo electrónico: maedu@hotmail.com. Código Orcid: orcid.org/0000-0003-1002-069X

** Magíster en Educación; profesor de matemáticas, Colegio Gimnasio Vermont, Departamento de Matemáticas. Correo electrónico: santiago.cardozo@gimnasiovermont.edu.co. Código Orcid: orcid.org/0000-0002-9000-638X

Resumen

El motivo de este reporte de caso está centrado en el interés por encontrar estrategias de enseñanza que aprovechen el potencial del *Software* de Geometría Dinámica (SGD) para promover en los estudiantes el uso espontáneo de razonamientos deductivos, a fin de justificar afirmaciones. Consideramos que los estudiantes pueden utilizar el razonamiento deductivo de manera implícita en la resolución de problemas y nos interesa estudiar las condiciones que lo llevan a producir conclusiones a partir de unos datos iniciales utilizando implicaciones lógicas, aunque no hagan referencia explícita a dichas implicaciones. Ese uso implícito depende del grado de convicción adquirido sobre las implicaciones que llamamos Hechos Geométricos (HG), y proponemos que este grado de convicción puede construirse gracias a la experimentación con el *Software* de Geometría dinámica. Exploramos las variables que afectan el diseño de una secuencia de actividades desde el enfoque de la Teoría de situaciones didácticas, que busca que los estudiantes, a través de la experimentación, identifiquen HG y se convenzan de su carácter apodíctico, para luego utilizarlos en razonamientos deductivos. Planteamos la hipótesis de que la situación fundamental que corresponde a la demostración en el contexto de la construcción geométrica con *Software* de Geometría dinámica es una situación en la que, a partir de un protocolo de construcción escrito, se solicita predecir si determinadas propiedades se cumplen y se mantienen al arrastrar.

Palabras clave

demostración; geometría; razonamiento; teoría de situaciones didácticas

Abstract

We are interested in finding teaching strategies that take advantage of the potential of dynamic geometry software (SGD), to promote in students the spontaneous use of deductive reasoning to justify affirmations. We consider that students can use deductive reasoning implicitly in solving problems and we are interested in studying the conditions that lead to conclusions from initial data using logical implications, although they do not make explicit reference to such

Fecha de recepción: 22/04/2019
Fecha de aprobación: 11/02/2020

implications. This implicit use depends on the degree of conviction acquired on the implications that we call Geometric Events (HG), and we propose that this degree of conviction can be built thanks to the experimentation with the dynamic geometry software. We explore the variables that affect the design of a sequence of activities from the Theory of Didactic Situations approach that seeks that students, through experimentation, identify Geometric Facts and become convinced of their apodictic character, and then use them in deductive reasoning. We propose the hypothesis that the fundamental situation that corresponds to the proof in the context of the geometric construction with dynamic geometry software, is a situation in which, from a written construction protocol, it is requested to predict if certain properties are met and maintained when dragging.

Keywords

geometry; proof; reasoning; situations; theory of didactic proof; theory of didactic

Resumo

Estamos interessados em encontrar estratégias de ensino que aproveitem o potencial do *software* de geometria dinâmica (SGD), para promover nos alunos o uso espontâneo do raciocínio dedutivo para justificar as afirmações. Acreditamos que os alunos podem usar o raciocínio dedutivo implícito na resolução de problemas e estamos interessados em estudar as condições que levam à produção de conclusões de alguns dados iniciais usando implicações lógicas, mas não fazem referência explícita a essas implicações. Que o uso implícito depende do grau de convicção adquirida sobre as implicações que chamamos fatos geométricos (HG), e propomos que este grau de convicção pode ser construído através da experimentação com o *software* de geometria dinâmica. Nós exploramos as variáveis que afetam o desenho de uma seqüência de atividades a partir da perspectiva da Teoria das Situações Didáticas que procura que os estudantes, através da experimentação, identifiquem atos geométricos e se convençam de sua característica apodítica para, em seguida, usá-los em raciocínio dedutivo. Colocámos a hipótese de que a situação fundamental corresponde à mostra no contexto da construção geométrica com *software* de geometria dinâmica é uma situação em que a partir de uma construção de escrita de protocolo é solicitado prever se certas propriedades são atingidas e mantidas arrastando.

Palavras-chave

demonstração; geometria; raciocínio; teoria das situações didáticas

Introducción

En la enseñanza y aprendizaje de la geometría, Acosta (2011) y Molina et ál. (2014) mencionan que los profesores de matemáticas han abandonado la enseñanza de la demostración en niveles de Educación Media y, en muchos casos, se limitan a la constatación de enunciados de teoremas para aplicarlos en la solución de problemas de cálculo de magnitudes; de ahí que la comunidad de educadores matemáticos manifieste la necesidad de enseñar la demostración como componente fundamental de la formación matemática. En relación con lo anterior, Hanna (1995) afirma:

> La demostración formal nace como una respuesta a una demanda continua de justificación, una demanda que se remonta a Aristóteles y Euclides, a través de Frege y Leibniz. Ha habido siempre una necesidad de justificar nuevos resultados [...], no siempre en el sentido limitado de definir su verdad, sino más bien en la más amplia acepción de suministrar razones para su plausibilidad. La demostración formal ha sido y es una respuesta suficientemente útil a esta preocupación por la justificación. (p. 30)

Reconocemos, también, que:

> existe una fuerte discusión sobre la conveniencia o inconveniencia del uso de *Software* de Geometría dinámica, basada en el impacto que puede tener en las prácticas de demostración, ya que al producir en el alumno la certeza de conjeturas basadas en la observación, haría inútil o innecesario el proceso de formalización. (Acosta, 2011, p. 164)

Sin embargo, Samper et ál. (2013) reconocen las bondades del uso de la Geometría dinámica en la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Dichos autores afirman que las tareas geométricas bien diseñadas y el uso de la Geometría dinámica para explorar y experimentar, favorecen la generación de un ambiente de indagación y, si se usa para buscar ideas para la justificación, se convierte en herramienta de mediación para el aprendizaje de la demostración.

En este artículo buscamos comunicar nuestras ideas sobre dos grandes preguntas: ¿Es posible lograr que los estudiantes utilicen de manera espontánea el razonamiento deductivo para justificar afirmaciones, y no como un efecto del contrato didáctico? Y, ¿el uso del *software* de Geometría dinámica puede contribuir a ese objetivo?

Intentaremos precisar el rol que puede tener el SGD en la promoción del razonamiento deductivo y en particular en el uso de dicho razonamiento para justificar que un determinado procedimiento de construcción produce efectivamente unas propiedades. Afirmamos que la experimentación con el *software* promueve la 'construcción de Hechos Geométricos[1] (HG)', como la convicción fuerte de que el hecho de que se verifiquen unas propiedades hace que también se verifiquen otras. Por otra parte, planteamos que un modelo de situación problema, en el que se entrega un protocolo de construcción y se solicita predecir (sin haber construido) si la figura resultante tendrá determinadas propiedades que mantendrá al arrastrar, es una situación fundamental para la demostración en geometría en el contexto de las construcciones con *Software* de Geometría dinámica.

Describimos el diseño de situaciones de clase donde se utiliza el SGD para resolver problemas de construcción, con el fin de

1 Un Hecho Geométrico, HG, es una afirmación "necesariamente verdadera" que se refiere a la implicación lógica entre propiedades; así, un HG puede constatarse, verificarse y experimentarse, puede convertirse en un teorema, si se hace una demostración que lo vincula a un sistema teórico.

promover la construcción de HG y el uso de estos en razonamientos deductivos, hasta lograr la justificación de propiedades geométricas de las construcciones a partir de los protocolos de construcción. Exponemos datos de una experimentación exploratoria para identificar variables didácticas que afectan ese proceso de enseñanza-aprendizaje y discutimos la pertinencia de nuestro enfoque teórico sobre el uso del SGD para la promoción de los razonamientos deductivos.

Fundamentación de la experiencia

Tomamos como referencia la Teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1989), en especial la búsqueda de un aprendizaje por adaptación (Margolinas, 1993) en contraposición a un aprendizaje guiado por el contrato didáctico. Aplicada a actividades con *Software* de Geometría dinámica, esta premisa implica que las decisiones de abandonar o adoptar una estrategia de solución deben estar motivadas ante todo por la eficacia para resolver el problema y no por la aprobación o desaprobación por parte del profesor. La validación que hace el estudiante de sus acciones se basa en las retroacciones que recibe del medio (SGD). Son estas retroacciones las que constituyen la fuente de la convicción con respecto a la eficacia de los HG .

Asumimos un modelo epistemológico de referencia (Gascon, 2014), según el cual la geometría es la ciencia de las construcciones y como tal busca responder dos tipos de pregunta: ¿Cómo producir una construcción exacta? y ¿cómo justificar que una construcción es exacta? Siguiendo a Knorr (1986) asumimos que los teoremas y problemas de los Elementos (Euclides) responden a la problemática de la construcción.

En el contexto de la SGD, una construcción se considera exacta cuando cumple con unas propiedades que se mantienen al arrastrar los objetos que la componen. Dicha definición implica una verificación experimental para decidir si una construcción es exacta (aunque las construcciones en el SGD tampoco son exactas, la gran coherencia entre el lenguaje, los dibujos y las medidas produce una ilusión de exactitud): utilización de medidas o construcciones auxiliares para comprobar la presencia de propiedades y el arrastre de los objetos para comprobar si esas propiedades son contingentes (se pierden al arrastrar) o necesarias (se mantienen al arrastrar). Esa verificación experimental contribuye también a la convicción sobre la eficacia de los procedimientos y sobre la validez de las afirmaciones.

Sin embargo, no podemos limitarnos a la verificación experimental como única fuente de convicción o de justificación. Ahora, siguiendo los planteamientos de Margolinas (1993), pensamos que es posible plantear situaciones adidácticas a los estudiantes, que los conduzcan a construir estrategias de solución asociadas a implicaciones lógicas, que se convierten a su vez en criterios de validez que van más allá de la interacción con el medio y permiten prescindir de ella. En otras palabras, planteamos experimentos que conducen a la construcción de la convicción sobre la eficacia de un procedimiento y la validez de una implicación lógica asociada, y luego planteamos problemas en los que el uso de esa implicación lógica permite encontrar una solución.

De vuelta a la problemática de construcción en el contexto del SGD, es posible constatar experimentalmente que las construcciones tienen propiedades que son producto directo de herramientas de construcción (como la perpendicularidad y el paralelismo) y otras que no son producto directo de una herramienta, sino de la combinación de otras propiedades. Llamamos Hecho Geométrico —el término *Hecho Geométrico* ha sido introducido por el grupo *Æ•G* para referirse a "enunciados que adquieren estatus de verdad en el aula" (Molina et ál. 2014, p.44) —, precisamente a la relación necesaria entre un conjunto de propiedades y otras que resultan de ellas. Los teoremas de la geometría son HG que han recibido una justificación deductiva.

Siguiendo a Calderón (2016), asumimos que es posible justificar experimentalmente algunos HG; es decir, construir la convicción sobre el carácter apodíctico de esas implicaciones, para luego utilizarlas como permiso para inferir en razonamientos deductivos. Igualmente, consideramos que los razonamientos deductivos no son exclusivos de los problemas de demostración, sino que pueden utilizarse en cálculos, situaciones de verificación y anticipación.

Es posible entonces jugar con las restricciones del medio; es decir, con las condiciones de solución de problemas para promover la utilización de razonamientos deductivos basados en HG ya construidos; por ejemplo, si se pregunta si una figura es un paralelogramo y se impide la verificación directa del paralelismo, los estudiantes deberán verificar directamente otras propiedades (igualdad de lados, igualdad de ángulos, bisección de diagonales), e invocar (implícitamente) un HG para afirmar que esas propiedades implican que la figura es un paralelogramo.

A partir de esta idea de restringir el medio con el cual interactúa el estudiante, proponemos que una situación en la que se entrega un protocolo de construcción de una figura y se pide predecir si una propiedad se cumple y se mantendrá al arrastrar, sin que el estudiante pueda realizar la construcción, es una situación que promueve el uso de HG en razonamientos deductivos y por lo tanto puede considerarse una situación fundamental para la enseñanza de la demostración. En efecto, los estudiantes solo tienen a su disposición tres estrategias para resolver este problema: responder al azar, intentar reconocer un procedimiento de construcción conocido que saben que produce la propiedad o verificar en el protocolo las condiciones necesarias de un HG que implique la propiedad.

Descripción de la experiencia

Diseño de la secuencia

Para poder plantear la situación fundamental mencionada es necesario que el estudiante conciba la posibilidad de predecir si una propiedad se va a mantener al arrastrar; es decir, tiene que distinguir entre propiedades que se mantienen al arrastrar y propiedades que no se mantienen al arrastrar, y saber que las primeras se producen ya sea por el uso de una herramienta de construcción que garantiza directamente la propiedad, o bien por la existencia de un HG que garantiza la propiedad.

Por lo tanto, es necesario realizar actividades previas a la situación fundamental, en las que el estudiante:1) Comprenda la diferencia entre una construcción exacta (que cumple unas propiedades y se mantienen al arrastrar los objetos que componen la figura) y una construcción aproximada (cuyas propiedades se pierden al arrastrar los objetos que componen la figura). 2) Reconozca que hay herramientas de construcción del *software* que garantizan que determinadas propiedades se mantienen al arrastrar. 3) Identifique (por lo menos) un HG. Es decir, reconozca que si se garantizan determinadas propiedades en la construcción, necesariamente habrá otras propiedades que también se cumplirán y se mantendrán al arrastrar. 4) Relacione el texto de un protocolo de construcción con una figura dinámica y reconozca en el texto la utilización de herramientas de construcción y por lo tanto la presencia necesaria de propiedades geométricas.

Decidimos entonces proponer actividades en las que el estudiante utilice construcciones aproximadas para reconocer patrones o relaciones que permitan hacer construcciones exactas. Estas actividades corresponden a la constatación de HG.

Después de que los estudiantes constaten el HG y lo utilicen para producir una construcción exacta, se les proponen actividades de verificación y anticipación en las que utilicen ese HG en un razonamiento deductivo (implícito). En las actividades de verificación se les entrega una construcción y se les pide que verifiquen si se cumple una propiedad (asociada al HG estudiado), impidiendo una verificación experimental directa de dicha propiedad; de esta manera, tendrán que utilizar el HG para inferir una estrategia indirecta de verificación. En las actividades de anticipación se afirma que una determinada figura cumple unas propiedades y se le pide al estudiante que prediga qué otras propiedades cumplirán; finalmente, se proponen actividades correspondientes a la situación fundamental. Es decir, donde se entregan protocolos de construcción y los estudiantes deben predecir si determinadas propiedades se mantendrán al arrastrar o no.

Con el fin de controlar el diseño y las variables que inciden en el desarrollo de la secuencia, realizamos una experiencia con dos estudiantes; para evitar efectos del contrato didáctico de la enseñanza usual de la demostración, decidimos aplicar las actividades a estudiantes que aún no hubieran recibido enseñanza sobre la demostración (grados séptimo-octavo). Como los estudiantes de estos niveles están familiarizados con los distintos tipos de cuadriláteros, decidimos utilizar HG relacionados con los problemas de construcción de rectángulos y rombos, en específico relativos a las propiedades de perpendicularidad y de equidistancia: (I) la circunferencia como lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos que pasan por dos puntos dados y (II) la mediatriz como lugar geométrico de todos los puntos equidistantes a dos puntos dados.

Por razones de extensión de este artículo, vamos a presentar juntos el diseño específico de algunas de las actividades propuestas y los datos sobre lo que los estudiantes hicieron y dijeron.

Nº 49 • Primer semestre de 2021 • pp. 255- 276
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web
TED

Ejemplos de lo ocurrido

A los estudiantes se les planteó el siguiente problema: dados los puntos *A* y *B* construir veinte puntos *P*, tales que el ángulo *APB* sea recto. Se les propone la siguiente estrategia para buscar la solución, a la que llamamos hilvanado: 1) Construir un punto *P* cualquiera; 2) Medir el ángulo *APB*; 3) Arrastrar el punto *P* hasta que la medida del ángulo *APB* sea aproximadamente 90°; 4) Repetir desde el paso 1.

Antes de iniciar la actividad…

Se espera que los estudiantes, después de construir un número suficiente de puntos con la estrategia propuesta, reconozcan que esos puntos parecen estar sobre una circunferencia.

Es posible que algunos estudiantes ubicaran los puntos muy cerca unos de otros, en una porción de la pantalla restringida, de manera que no pueden 'ver' la forma de circunferencia. En este caso, el profesor solicitará la búsqueda de otras posiciones para establecer la relación entre los objetos correspondientes.

Cuando los estudiantes reconozcan que los puntos construidos parecen estar sobre una circunferencia, el profesor les pide que construyan esa circunferencia sobre los puntos.

Existen varias estrategias posibles para responder a esta solicitud:

1. Los estudiantes utilizan la herramienta 'círculo por tres puntos' y seleccionan tres de los puntos construidos. En este caso, la circunferencia aparece sin su centro.
2. Los estudiantes utilizan la herramienta 'círculo de radio fijo', ubican el centro de manera perceptiva y luego acomodan el radio para que la circunferencia pase por los puntos construidos.
3. Los estudiantes utilizan la herramienta 'círculo (centro-punto)', ubican el centro de manera perceptiva y seleccionan uno de los puntos construidos. Luego acomodan la posición del centro para que la circunferencia pase por los demás puntos.

La construcción aproximada de la circunferencia sirve para verificar la conjetura hecha por los estudiantes: efectivamente, parece que todos los puntos que cumplen aproximadamente la propiedad están sobre una circunferencia.

El profesor pregunta si podrían construir esa circunferencia, pero en una figura nueva, donde solo están los puntos iniciales *A* y *B*.

Se espera que los estudiantes constaten que la circunferencia que construyeron pasa por los puntos *A* y *B* y que intenten utilizar esta propiedad para responder a la solicitud del profesor.

Si los estudiantes realizan una construcción perceptiva; es decir, ubican de manera perceptiva el centro de la circunferencia, el profesor les solicitará que construyan un punto sobre la circunferencia y midan el ángulo. Como es muy probable que la medida de ese ángulo no sea exactamente 90°, el profesor preguntará si es posible lograr que la medida sea exactamente 90° y se mantenga al arrastrar los puntos *A* y *B*.

Se espera que los estudiantes concluyan que el centro de la circunferencia debe ser el punto medio de *AB*, pero el profesor puede proponer preguntas que les ayuden a llegar a esa conclusión, como: ¿el centro de esa circunferencia puede estar en cualquier lugar? y ¿existe alguna relación entre el centro de la circunferencia y los puntos *A* y *B*?

Cuando los estudiantes digan que el centro de la circunferencia debe ser el punto medio de *AB*, el profesor podrá mostrarles la herramienta punto medio del *software*, que podrán usar para hacer una construcción exacta de la circunferencia que contiene todos los puntos buscados. El profesor pedirá una verificación experimental de que la construcción es exacta: construir un punto sobre la circunferencia, medir el ángulo (que deberá medir exactamente 90°) y arrastrar los puntos *A* y *B* y el punto sobre la circunferencia.

Se espera que digan que el ángulo APB siempre es recto sin importar que los puntos *A* y *B* se muevan; en este punto de la actividad se espera que identifiquen la diferencia entre una construcción exacta y una aproximada, ya que al realizar el hilvanado la construcción no conserva las propiedades, mientras que en la segunda, la construcción cumple con las condiciones a pesar del arrastre.

En esta actividad, los estudiantes deben tomar consciencia de las condiciones suficientes y necesarias que se involucran en el HG, pues esto les permitirá usarlo en la construcción exacta y en el proceso de justificación

Durante la actividad…

En la Figura 1 mostramos algunas imágenes de la estrategia de hilvanado como la implementaron los estudiantes.

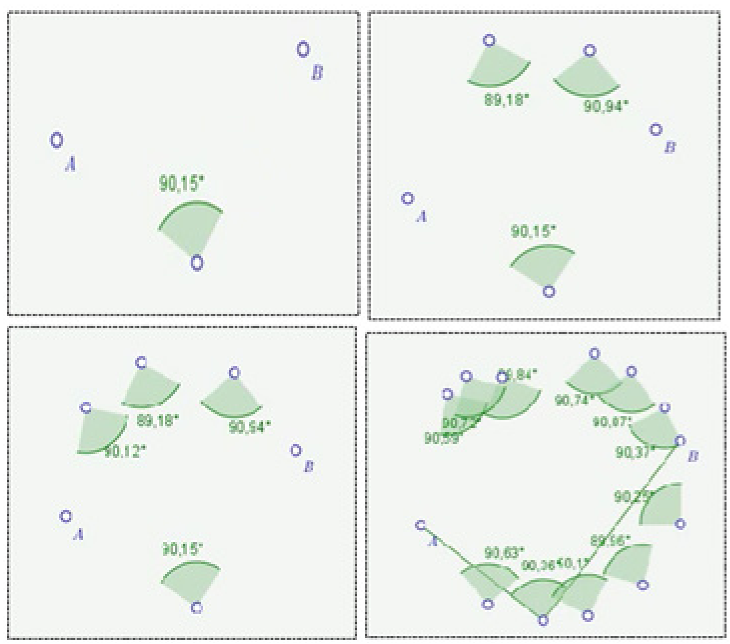

Figura 1. Construcción de los estudiantes

Fuente: elaboración propia.

Cuando los estudiantes terminaron de ubicar los puntos *P* con las características solicitadas, el profesor intervino preguntándoles sobre las características de esos puntos (Tabla 1).

Nº 49 • Primer semestre de 2021 • pp. 255- 276
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web

Tabla 1. Discusión sobre las características de los puntos P

1	Profesor	¿Qué características tienen los puntos construidos?
2	Estudiante	Forman una circunferencia
3	Profesor	¿Puede construir esa circunferencia?
4	Estudiante	Sí

Fuente: elaboración propia

Los estudiantes realizaron una construcción aproximada de la circunferencia, pues ubicaron el centro de manera perceptiva (Figura 2).

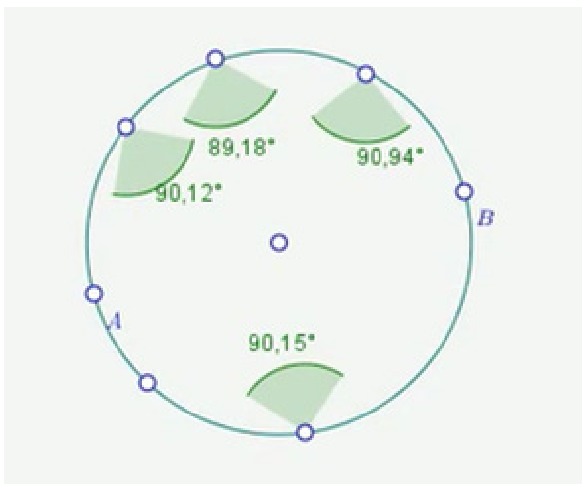

Figura 2. Construcción de los estudiantes

Fuente: elaboración propia

El profesor les solicitó que arrastraran el centro que construyeron (Figura 3).

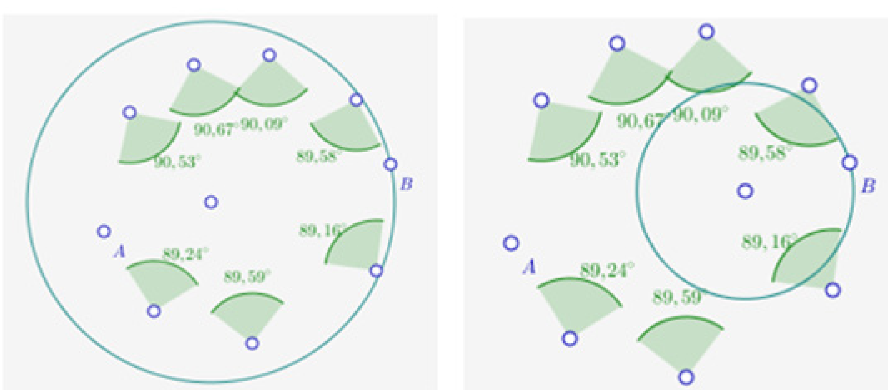

Figura 3. Construcción de los estudiantes

Fuente: elaboración propia

De esta manera los estudiantes constatan que su construcción no es exacta. El profesor pregunta a los estudiantes si pueden construir ese punto de manera exacta; los estudiantes ubican nuevamente el centro de la circunferencia de manera aproximada, haciendo que la circunferencia aparentemente pase por los puntos antes construidos. Miden las distancias entre los puntos *A* y *B* y el posible centro y afirman: "debe estar en la mitad de los puntos *A* y *B*".

El profesor les pide que en un nuevo archivo construyan dos puntos *A* y *B* y realicen la construcción exacta de la circunferencia que genera los ángulos rectos. Los estudiantes ubican los puntos *A* y *B* en cualquier parte de la pantalla; con la herramienta *punto medio,* (que ya conocían por actividades anteriores) construyen el punto medio del segmento *AB*, usan la herramienta *círculo*, seleccionando el punto medio del segmento y el punto *A*; luego se les pide que ubiquen un punto sobre la circunferencia y verifiquen si el ángulo que se forma es recto. También, se les pide a los estudiantes arrastrar los distintos objetos de la construcción realizada (puntos y círculo), verificando que sea una construcción exacta (Figura 4).

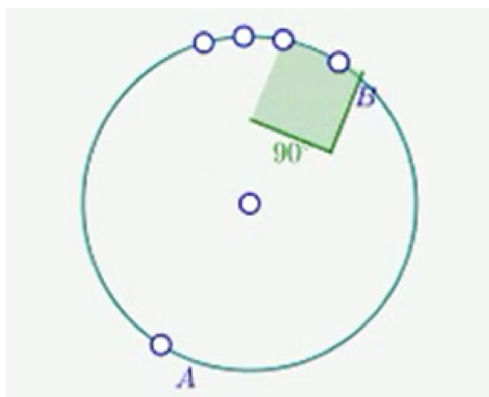

Figura 4. Verificación ángulo recto

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, se les propone que escriban un mensaje para que una persona que no conozca la construcción pueda lograr que los veinte puntos cumplan la condición de que el ángulo *APB* mida 90°.

Los mensajes escritos por los estudiantes se muestran en las figuras 5 y 6.

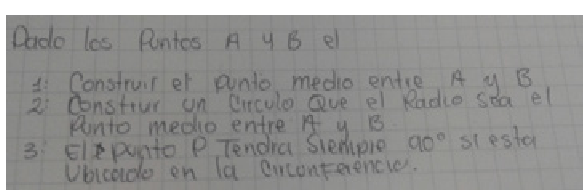
Dado los Puntos A y B el
1: Construir el punto medio entre A y B
2: Constriur un Circulo Que el Radio sea el Punto medio entre A y B
3: El Punto P Tendra Siempre 90° si esta Ubicado en la Circunferencia.

Figura 5. Mensaje escrito por los estudiantes

Fuente: elaboración propia.

Nº 49 • Primer semestre de 2021 • pp. 255- 276
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web

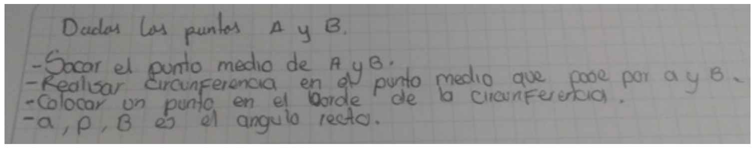
Dados los puntos A y B.
-Sacar el punto medio de A y B.
-Realizar circunferencia en el punto medio que pase por a y B.
-Colocar un punto en el borde de la circunferencia.
-a, p, B es el angulo recto.

Figura 6. Mensaje de los estudiantes

Fuente: elaboración propia.

En estos mensajes se evidencia el reconocimiento por parte de los estudiantes de las condiciones suficientes y necesarias del HG que están trabajando.

Actividad de justificación

Después de realizar actividades de verificación y anticipación, se les entregó a los estudiantes el siguiente protocolo de construcción, Figura 7.

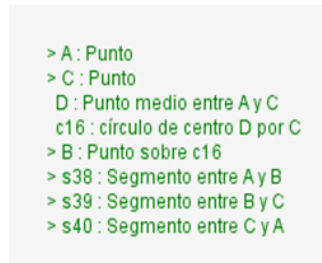
> A : Punto
> C : Punto
D : Punto medio entre A y C
c16 : círculo de centro D por C
> B : Punto sobre c16
> s38 : Segmento entre A y B
> s39 : Segmento entre B y C
> s40 : Segmento entre C y A

Figura 7. Protocolo de construcción

Fuente: elaboración propia.

Y se les pidió que dijeran si el polígono *ABC* es un triángulo rectángulo, sin realizar la construcción. Los estudiantes realizan “dibujos en el aire” de la información presentada en el protocolo; afirman que con el protocolo entregado sí es posible construir un triángulo rectángulo (Tabla 2).

Tabla 2. Diálogo entre profesor y estudiante sobre el protocolo de construcción

1	Profesor	¿Se puede construir un triángulo rectángulo?
2	Estudiante	(Luego de leer el protocolo haciendo “dibujos en el aire”). Sí
3	Profesor	¿Por qué?
4	Estudiante	Se tienen los puntos A y C y luego se construye el punto medio entre estos dos; después se hace un círculo y se pone el punto B encima. Después se construyen los lados del triángulo
5	Profesor	¿Cuál sería el ángulo recto?
6	Estudiante	¿El de 90°?
7	Profesor	Sí
8	Estudiante	[...] El ángulo ABC porque B es el vértice

Fuente: elaboración propia.

Los estudiantes concluyen de manera correcta que el triángulo *ABC* es rectángulo en *B*; hay evidencia de que los estudiantes conocen las condiciones del HG, específicamente la pertenencia del punto *B* a la circunferencia; sin embargo, es posible que los estudiantes no hayan utilizado un razonamiento deductivo, sino solamente una comparación del protocolo dado con el protocolo producido por ellos. Es decir, no necesariamente utilizan el HG como permiso para inferir, verificando el cumplimiento de las condiciones necesarias y suficientes.

Variables emergentes

Procedimiento de construcción

En la actividad presentada, no es posible afirmar que los estudiantes utilizaron el HG en un razonamiento deductivo, pues es posible que simplemente hayan comparado dos procedimientos de construcción concluyendo que son iguales. El HG debe ser independizado del procedimiento de construcción, para lo cual es necesario que reconozcan la presencia de las condiciones necesarias y suficientes, aunque no sean resultado de aplicar el procedimiento de construcción que ellos produjeron.

Intentando controlar esta variable, se propuso un nuevo conjunto de actividades a los estudiantes, esta vez alrededor del HG, "si un punto está sobre la mediatriz de un segmento, entonces equidista de los extremos del segmento". Se siguió en general la misma secuencia de actividades.

Antes de iniciar la actividad…

Se les propuso el siguiente problema: Dados los puntos *A* y *B* construir veinte puntos *P*, tales la distancia *AP* sea igual a la distancia *PB*, ($AP = PB$). Se les propone la siguiente, al igual que en la actividad anterior, el uso de la estrategia del hilvanado: 1) Construir un punto *P* cualquiera; 2) Medir la distancia *AP* y *PB*; 3) Arrastrar el punto *P* hasta que las medidas *AP* y *PB* sean aproximadamente iguales 4) Repetir desde el paso 1.

Cuando los estudiantes reconozcan que los puntos construidos parecen estar sobre una recta, el profesor les pide que construyan esa recta sobre los puntos.

Existen varias estrategias posibles para responder a esta solicitud:

- Los estudiantes utilizan la herramienta 'recta' y seleccionan dos de los puntos construidos.
- Los estudiantes utilizan la herramienta 'segmento', construyen el segmento *AB* y con la herramienta 'punto' ubican perceptivamente el punto medio del segmento; luego con la herramienta 'recta' construyen una recta que pasa por el 'punto medio del segmento' y uno de los puntos *P* construidos.

  La construcción aproximada de la recta sirve para verificar la conjetura hecha por los estudiantes: efectivamente, parece que todos los puntos que cumplen aproximadamente la propiedad están sobre una recta.
- El profesor pregunta si podrían construir esa recta, pero en un archivo nuevo, donde solo están los puntos iniciales *A* y *B*.
- Se espera que los estudiantes constaten que la recta que construyeron es perpendicular al segmento *AB* y que intenten utilizar esta propiedad para responder a la solicitud del profesor.

- Si los estudiantes realizan una construcción perceptiva; es decir, ubican de manera perceptiva el punto medio del segmento *AB* y la perpendicularidad, el profesor les solicitará que construyan un punto sobre la recta y midan la distancias *AP* y *PB*. Como es muy probable que estas medidas no sean iguales, el profesor preguntará si es posible lograr que las medidas sean congruentes y se mantengan al arrastrar los puntos *A* y *B*.
- Se espera que los estudiantes concluyan que el punto medio de *AB* y la recta perpendicular al segmento que pase por ese punto; sin embargo, el profesor puede proponer preguntas que les ayuden a llegar a esa conclusión, como: ¿la recta puede pasar por cualquier par de puntos? O ¿existe alguna relación entre el la recta y el segmento *AB*?
- Cuando los estudiantes digan que la recta debe ser perpendicular al segmento por su punto medio, el profesor podrá mostrarles las herramientas punto medio y recta perpendicular del *software*, que podrán usar para hacer una construcción exacta de la recta (mediatriz) que contiene todos los puntos buscados. El profesor pedirá una verificación experimental de que la construcción es exacta: construir un punto sobre la recta, medir las distancias a los extremos del segmento (que deberán ser congruentes) y arrastrar los puntos *A* y *B* y el punto sobre la recta.
- Cuando han terminado de realizar la construcción exacta, se les pide que arrastren los puntos *A* y *B*. Se espera que digan que (1) la recta siempre es perpendicular al segmento, (2) la recta siempre pasa por el punto medio del segmento, (3) la distancia de cualquier punto de la recta a los extremos del segmento siempre es la misma.

Durante la actividad…

Los estudiantes recurren a la estrategia del hilvanado, además, usan las herramientas del SGD para mostrar las medidas de los puntos dados al punto construido; en la Figura 8 se muestra el trabajo de los estudiantes.

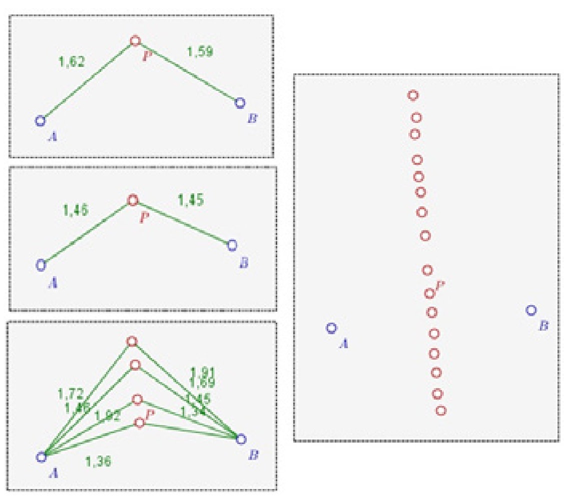

Figura 8. Construcción de los estudiantes

Fuente: elaboración propia.

Cuando los estudiantes terminan de ubicar los puntos *P* con las características solicitadas, el profesor interviene preguntándoles sobre las características de esos puntos (Tabla 3).

Tabla 3. Características de los puntos P-Mediatriz

1	Profesor	¿Qué características tienen los puntos construidos?
2	Estudiante	Forman una recta
3	Profesor	¿Puede construir esa recta?
4	Estudiante	Sí

Fuente: elaboración propia.

Los estudiantes realizan una construcción aproximada de la recta, Figura 9.

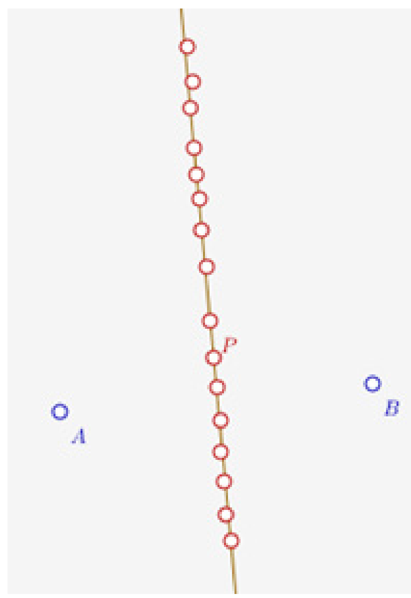

Figura 9. Construcción de los estudiantes

Fuente: elaboración propia.

Ubican de manera aproximada la recta tomando dos de los puntos que construyeron. El profesor les solicita que arrastren los puntos que seleccionaron para la construcción de la recta y constatan que la construcción no es exacta (Figura 10).

Nº 49 • Primer semestre de 2021 • pp. 255- 276
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web
TED

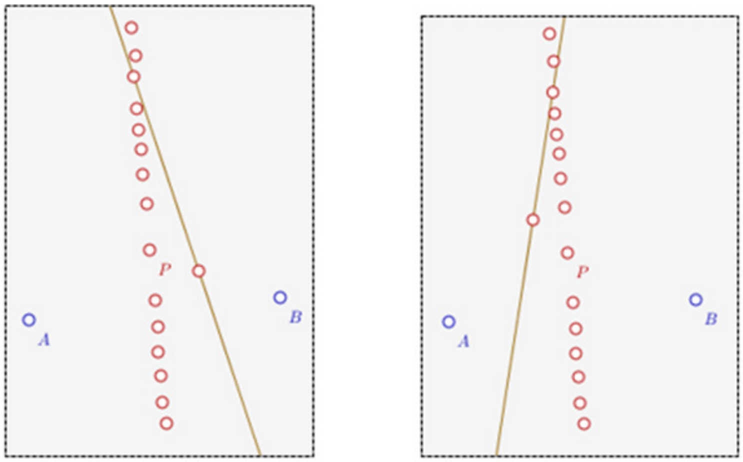

Figura 10. Construcción de los estudiantes

Fuente: elaboración propia.

El profesor les pregunta si pueden construir la recta de tal manera que se mantengan las propiedades (Tabla 4 y Figura 11).

Tabla 4. Discusión sobre la construcción exacta de la Mediatriz

1	Profesor	¿La recta tiene alguna característica especial?
2	Estudiante	Mmmm… ¿Es perpendicular?
3	Profesor	¿Cómo puede mirar eso?
4	Estudiante	Mirando si el ángulo es recto.

Fuente: elaboración propia.

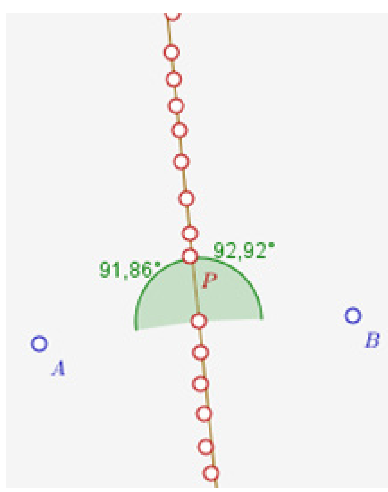

Figura 11. Construcción de los estudiantes

Fuente: elaboración propia.

Los estudiantes identifican una condición de la mediatriz, sin embargo, aún hace falta la condición del punto medio; no obstante, los estudiantes tratan de realizar una construcción aproximada con la condición encontrada, la perpendicularidad. Para ello, en una pestaña nueva, trazan el segmento $\overline{AB}$ y usando la herramienta *recta perpendicular* ubican un punto sobre el segmento y construyen la recta (Figura 12).

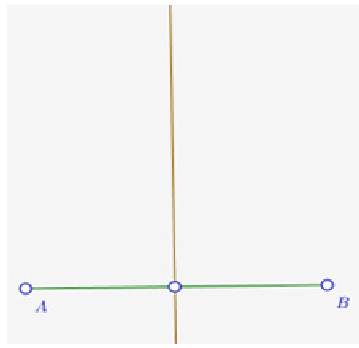

Figura 12. Construcción de la recta perpendicular

Fuente: elaboración propia.

Bajo esta construcción, se genera el diálogo presente en la Tabla 5.

Tabla 5. Construcción exacta Mediatriz

1	Profesor	¿En esa recta están los puntos P?
2	Estudiante	Sí
3	Profesor	¿Qué característica tienen esos puntos?
4	Estudiante	Tienen la misma distancia a estos puntos (señala los puntos A y B)

Fuente: elaboración propia.

Los estudiantes ubican un punto sobre la recta construida y luego miden las distancias de este punto a los extremos del segmento (Figura 13).

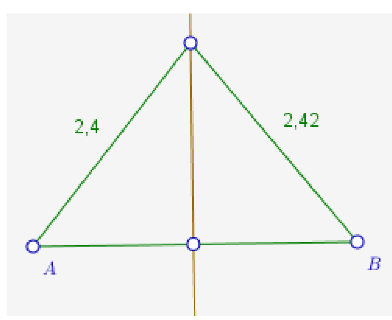

Figura 13. Verificación de la construcción exacta

Fuente: elaboración propia.

Nº 49 • Primer semestre de 2021 • pp. 255- 276
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web
TED

Inmediatamente los estudiantes se dan cuenta de que las distancias no son las mismas; sin embargo, arrastran el punto ubicado sobre el segmento *AB* hasta que las distancias mostradas sean las mismas (Figura 14 y Tabla 6).

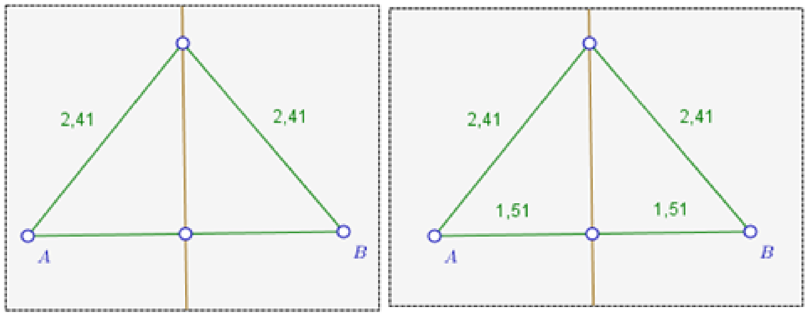

Figura 14. Verificación de la construcción exacta

Fuente: elaboración propia.

Tabla 6. Discusión sobre la verificación de la construcción

1	Estudiante	Ahhhh ... Ese punto debe estar en la mitad
2	Profesor	¿Qué punto?
3	Estudiante	(Señala el punto medio del segmento $\overline{AB}$)
4	Profesor	¿Con eso puede hacer la construcción exacta?
5	Estudiante	Sí

Fuente: elaboración propia.

El estudiante además de realizar la construcción exacta muestra las medidas de los segmentos *AC* y *BC* y arrastra la construcción realizada, verificando que sea una construcción exacta (Figura 15).

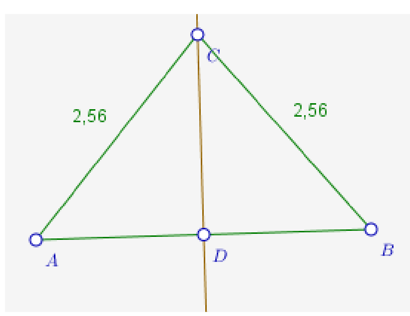

Figura 15. Construcción exacta

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, se le propone que escriba un mensaje en donde refieran las condiciones que se deben cumplir para que los puntos estén a la misma distancia.

Se busca que los estudiantes establezcan el antecedente del HG, para que tengan como consecuente la equidistancia de los puntos. El mensaje se presenta en la Figura 16.

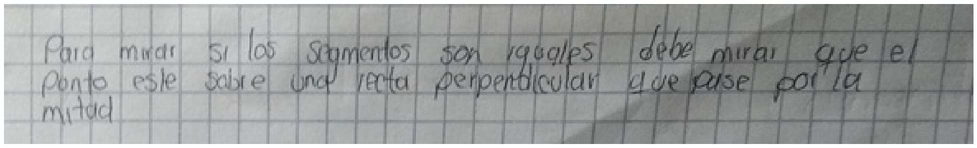

Figura 16. Mensaje del estudiante

Fuente: elaboración propia.

Se observa que el estudiante no hace referencia al objeto geométrico mediatriz, sino alude a las propiedades de este, razón por la cual el profesor institucionaliza el concepto, solicitándole al estudiante que reescriba el mensaje en términos de la mediatriz (Figura 17).

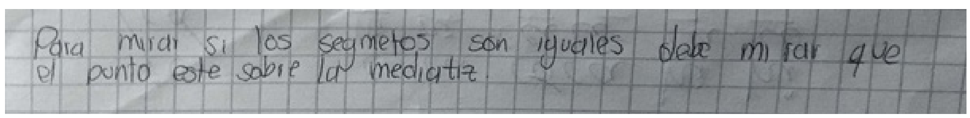

Figura 17. Mensaje del estudiante

Fuente: elaboración propia.

En estos mensajes se evidencia el reconocimiento por parte de los estudiantes de las condiciones suficientes y necesarias que se involucran en el HG.

Protocolo de construcción

Después de realizar actividades de verificación y anticipación, se les propone a los estudiantes el siguiente protocolo de construcción, preguntándoles si con este es posible construir un triángulo isósceles (Figura 18 y Tabla 7).

```
D : Punto
E : Punto
s31 : Segmento entre D y E
F : Punto medio entre D y E
per5 : Recta por F perpendicular a s31
G : Punto sobre per5
s32 : Segmento entre D y G
s33 : Segmento entre G y E
```

Figura 18. Protocolo de un triángulo isósceles

Fuente: elaboración propia.

Tabla 7. Movilización del HG en el Protocolo de Construcción

1	Profesor	¿Se puede construir un triángulo isósceles?
2	Estudiante	(Luego de leer el protocolo haciendo "dibujos en el aire"). Sí
3	Profesor	¿Por qué?
4	Estudiante	Se tienen los puntos D y E y luego se construye el punto medio entre estos dos que es F; después se hace una recta perpendicular por ese punto y se pone el punto G encima. Después se construyen los lados del triángulo
5	Profesor	¿Pero por qué es isósceles?
6	Estudiante	Porque esa recta es mediatriz, porque pasa por la mitad y es perpendicular; como G está en la mediatriz los lados del triángulo son iguales.
7	Profesor	¿Cuáles lados?
8	Estudiante	.... DG y GE

Fuente: elaboración propia.

Se evidencia en la línea 6 la movilización del HG: los estudiantes aluden a las condiciones que se necesitan para obtener la conclusión. Además, en la línea 8, refiere los segmentos que son congruentes producto del HG. Los estudiantes concluyen de manera correcta que el triángulo *ABC* es isósceles y además refieren los segmentos que son congruentes; en esta actividad se puede constatar que los estudiantes conocen todas las condiciones del antecedente del HG, que permiten que el consecuente sea verdadero y les concede concluir que el triángulo es isósceles (sin construirlo).

Segunda parte

Para poder verificar si los estudiantes realizan un razonamiento deductivo utilizando el HG como permiso para inferir, y no solamente comparan dos procedimientos de construcción, se les propuso un segundo protocolo, en el que el HG se verifica dos veces: una por medio del procedimiento de construcción que los estudiantes trabajaron y otra como resultado indirecto de la construcción (Figura 19 y Tabla 8).

```
M : Punto
N : Punto
s34 : Segmento entre M y N
P : Punto medio entre M y N
per7 : Recta por P perpendicular a s34
R : Punto sobre per7
c26 : círculo de centro P por R
S : Intersección entre per7 y c26
s35 : Segmento entre M y R
s36 : Segmento entre R y N
s37 : Segmento entre N y S
s38 : Segmento entre S y M
```

Figura 19. Protocolo de un rombo

Fuente: elaboración propia.

Tabla 8. Movilización del HG en el protocolo de construcción

1	Profesor	¿Se puede construir un rombo?
2	Estudiante	(Luego de leer el protocolo haciendo "dibujos en el aire"). No sé, puede ser…
3	Profesor	¿Por qué?
4	Estudiante	Como en la otra construcción, en esta se hace la mediatriz porque se pone… se construye una recta perpendicular por el punto medio de MN, por eso es mediatriz, y como R esta sobre la mediatriz hay dos lados iguales, como el de antes. RN es igual que RM
5	Profesor	¿y por qué no sabe si es rombo?
6	Estudiante	Por qué no sé si hay otra mediatriz; si la hay, sí
7	Profesor	¿Cuál mediatriz?
8	Estudiante:	Mmmm tendría que ser MN, pero no me dice que sea perpendicular y pase por la mitad, si tuviera eso sí

Fuente: elaboración propia.

Aparentemente, el estudiante busca verificar las condiciones necesarias para el HG: *MN* debe ser perpendicular a *RS* y debe pasar por el punto medio de *RS*. Pero sorprendentemente no logra concluir que *MN* es perpendicular a *RS*, a pesar de que ya ha afirmado que *RS* es perpendicular a *MN*.

Variable hechos geométricos asociados

Planteamos la hipótesis de que el estudiante no conoce el HG de la simetría de la relación de perpendicularidad, por lo cual no logra concluir que *MN* es perpendicular a *RS*; tomamos conciencia de que son necesarios otros HG a fin de concluir si se cumplen las condiciones necesarias y suficientes del HG que se está trabajando. Así, es necesario identificar todos los HG asociados y garantizar que los estudiantes puedan movilizarlos para completar un razonamiento deductivo en el que se utilice el HG trabajado como permiso para inferir.

Conclusiones

El problema de la enseñanza de la geometría no radica tanto en lograr que los estudiantes reproduzcan la estructura axiomática-deductiva de los conocimientos teóricos, pues como lo menciona Hanna (1995), la clase cobraría el estatus de ritual, sino más bien en generar en los estudiantes la necesidad de esos conocimientos teóricos y de esa estructura. El SGD permite distinguir de manera experimental una construcción exacta de una construcción aproximada posibilitando la identificación de las implicaciones lógicas que llamamos HG y la convicción de su carácter apodíctico.

Nº 49 • Primer semestre de 2021 • pp. 255- 276
ISSN 2665-3184 impreso • ISSN 2323-0126 Web

En las respuestas de los estudiantes observados constatamos su convicción de que determinadas propiedades deben estar presentes en la construcción, a pesar de que no fueron producidas directamente. Es decir, han interiorizado el HG como un criterio de validez, en el sentido de Margolinas (1993), y son capaces de movilizarlo en situaciones de verificación, anticipación y justificación a partir de un protocolo de construcción. La experimentación con el SGD los llevó a desarrollar esa convicción asociada con el HG; también vemos cómo los estudiantes no se quedan apegados al procedimiento de construcción, sino que identifican las propiedades que deben verificar para poder concluir sobre las propiedades que deben predecir. Lo cual nos permite afirmar que el HG se ha independizado en cierto grado del problema que le dio origen y del procedimiento de construcción exacto producido por ellos.

Algunas de las variables que afectan el desarrollo de las actividades que conduzcan a la construcción de HG y su movilización en razonamientos deductivos son: 1) el contrato didáctico: es necesario que el profesor esté atento a asociar la validez de los procedimientos a la validación experimental y no a su aprobación. 2) La formulación: es necesario que los estudiantes formulen en palabras el HG, identificando las condiciones necesarias y suficientes, para que estén en capacidad de reconocer ese HG en un texto como el protocolo de construcción. 3) La dependencia e independencia del procedimiento de construcción: en la observación constatamos que es posible que los estudiantes reconozcan el HG únicamente como procedimiento de construcción, por lo cual es necesario desarrollar actividades donde los estudiantes reconozcan el HG, aunque no se haya realizado el procedimiento de construcción que ellos conocen. 4) La necesidad de otros HG: igualmente, la experimentación nos mostró cómo es necesario movilizar otros HG para poder verificar si se cumplen o no las condiciones necesarias y suficientes de un HG particular.

Además, mostramos cómo la experimentación con *Software* de Geometría dinámica ayuda a construir una convicción sobre el carácter apodíctico de las implicaciones lógicas que llamamos HG. El trabajo sobre la distinción entre construcciones exactas y construcciones aproximadas contribuye a esa construcción, pero esa construcción no implica reducir el conocimiento geométrico a un conocimiento experimental: es posible movilizar esos HG como criterios de validez en situaciones de verificación, de anticipación y de justificación, donde los estudiantes realizan razonamientos deductivos que les permiten responder preguntas. En particular, hemos mostrado cómo los estudiantes pueden ser capaces de predecir si determinadas propiedades se van a mantener al arrastrar, antes de hacer la validación experimental, y pueden hacer referencia a las condiciones necesarias de los HG como justificación para esas predicciones. Todo esto, movilizando los HG de manera espontánea y no como un efecto del contrato didáctico.

Referencias

Acosta, M., Mejía. C. y Rodríguez, C. (2011). Resolución de problemas por medio de matemática experimental: uso de *software* de geometría dinámica para la construcción de un lugar geométrico desconocido. *Revista Integración. Escuela de matemáticas*, *29*(2), 163-174.

Brousseau, G. (1989). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Calderón, J. (2016). *Diseño de una ingeniería didáctica para promover el razonamiento inductivo y el razonamiento deductivo en el* *contexto de la construcción de paralelogramos, utilizando software de geometría dinámica.* [Tesis de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas].

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación matemática, 26*(1), 99-123.

Hanna, G. (1995). Challenges to the Importance of Proof. *For The Learning of Mathematics*, *15*(3), 42-49

Knorr, W. (1986). *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Birkhiuser.

Margolinas, C. (1993). *De L'importance du Vrai et du Faux dans la Classe de Mathémati ques*. La Pensée Sauvage, Editions. [Trad. Acosta, M. (2009). *La importancia de lo Verdadero y de lo Falso en la clase de matemáticas*]. Universidad Industrial de Santander.

Molina, O., Luque, C. y Robayo, A. (2014). Producción de teoremas con estudiantes en extraedad: la justificación de una conjetura. *Tecné Episteme y Didaxis:* TED, *(35),* 39-61. https://doi.org/10.17227/01213814.35ted38.62

Samper. C. y Molina, O. (2013). *Geometría plana: un espacio de aprendizaje*. Universidad Pedagógica Nacional.

Para citar este artículo:

Acosta, E. y Cardozo, S. (2021). Una estrategia de enseñanza de la demostración utilizando *software* de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis:* TED, (49), 255-276. https://doi.org/10.17227/ted.num49-9884